



خفن ترين جمع بندي ترم دووم رياضى و امار ۳





مرور سریع اما کامل نیمسال دوم

دنباله‌ی حسابی: در این دنباله هر جمله از جمله‌ی قبل به مقداری ثابت یا بیشتر یا کمتره. این مقدار ثابت همیشه «اختلاف مشترک».

اختلاف مشترک	نوع دنباله
$d > 0$	افزایشی
$d = 0$	ثابت
$d < 0$	کاهشی

$d=0$
۵, ۵, ۵, ...

$d=-4$
۲۰, ۱۶, ۱۲, ۸, ...

ضابطه عمومی دنباله حسابی (جماع عمومی)

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$d=3$
۲, ۵, ۸, ۱۱, ... a_n

جماع nام = n جمله

- ۱) جمله‌ی nام: a_n
- ۲) جمله‌ی اول: a_1
- ۳) شماره‌ی جمله: n
- ۴) اختلاف مشترک: d

تمرین: فردی در یک هفته مبلغ ۵۰۰ هزار تومان را پس انداز می‌کند و هر هفته مبلغ ۶۰ هزار تومن به آن اضافه می‌کند. بعد از ۱۰ هفته چه مبلغی پس انداز کرده است؟

۵۰۰, ۵۶۰, ۶۲۰, ...

حساب $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 500 \\ d = 60 \\ n = 11 \end{array} \right.$

$a_{11} = a_1 + 10d$

۱۰ بار پس انداز کرده
۱۰ بار ۶۰ اضافه کرده

$a_{11} = ?$

۱۰d

هزار تومان $500 + 10(60) = 1100$
۲۰۰



$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

تمرین: در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = -5$ و $d = 8$ است. کدام جمله برابر ۵۵۵ است؟

$n = ? \rightarrow$ چندمین جمله

$$n = \frac{555 - (-5)}{8} + 1 = 70 + 1 = 71$$

$$a_{71} = 555$$



دنباله داده شده : $2, 5, 8, 11, \dots$

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

$$d = 8 - 5 = 3$$

دو جمله برای آن به

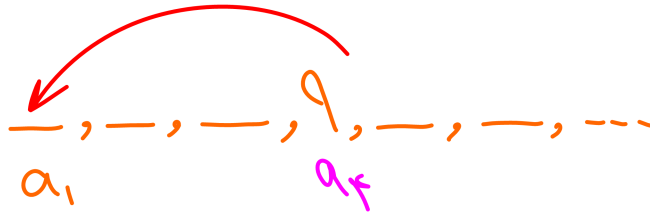
فرمول \rightarrow

تمرین: جملات چهارم و هفتم دنباله‌ای به ترتیب ۹ و ۲۴ هستند، اختلاف مشترک این دنباله چند است؟

اختلاف مشترک = $\frac{24 - 9}{7 - 4} = \frac{15}{3} = 5$

حرکت بن محمدت دنباله

به کمک d



$$a_1 = a_4 - 3d$$

$$a_1 = 9 - 3(5) = -6$$

برای سبب جمله اول

$$a_{r_0} = ?$$

$$a_{r_0} = a_1 + 29d$$

$$a_{r_0} = a_4 + 24d$$



تمرین: سه عدد را به گونه ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله ی حسابی تشکیل دهند.

$$10, 12, 14, 16, 18$$

a_1 a_5

$$d = \frac{18 - 10}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$$



جدول اول ^{اضافه} + هر عدد ^{بعدی} $a_{n+1} = a_n + d ; a_1$

تمرین: رابطه‌ی بازگشتی دنباله‌های زیر را بنویسید.

⁺³
5, 8, 11, 14, ...

$$d = 8 - 5 = 3$$

$$a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 5$$

⁻¹⁰
100, 90, 80, 70, ...

$$d = 90 - 100 = -10$$

$$a_{n+1} = a_n - 10, a_1 = 100$$



متوالی هم فاصله a, b, c
 $a, \dots, \dots, b, \dots, \dots, c$ } $\Rightarrow 2b = a + c$

تمرین: اگر ۳۰، b، ۱۸ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، اختلاف مشترک را بیابید.

جواب: $\frac{30 - 18}{3 - 1} = \frac{12}{2} = 6$

واکنش حسابی

$$2b = 18 + 30$$

$$2b = 48$$

$$b = 24$$

$$18, 24, 30$$

$$d = 24 - 18 = 6$$

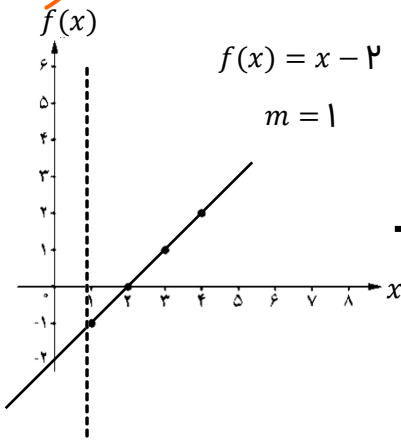


شباهت دنباله‌ی حسابی به تابع خطی:

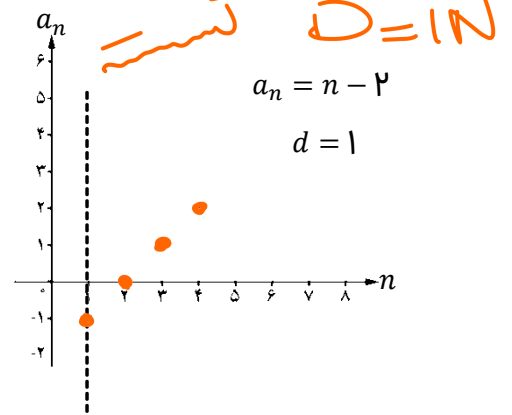
اگه دامنه‌ی تابع خطی رو اعداد طبیعی در نظر بگیری، دقیقاً با یه دنباله‌ی حسابی مواجه می-

شیم که شیب خط همون اختلاف مشترکِ دنباله‌س:

$D = \mathbb{R}$ دنباله



اعداد قبل از حذف بشن و بعد از
هم فقط طبیعی‌ها بمونن





مجموع جملات دنباله حسابی:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

بزرگ

و

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

کوچک

تمرین: مجموع ۳۰ عدد طبیعی فرد متوالی، با کوچکترین عدد ۵۱ کدام است؟

۵۱, ۵۳, ۵۵, ...

$a_1 = 51$
 $d = 2$
 $S_{30} = ?$

$$S_{30} = \frac{30}{2} \left(\frac{102}{2} + \frac{58}{2} \right) = \frac{30}{2} \times 140 = 2100$$

تمرین: مجموع اعداد طبیعی فرد و متوالی شروع از ۲۳ و ختم به ۶۱ کدام است؟

۲۳, ۲۵, ۲۷, ..., ۶۱

$a_1 = 23$ $d = 2$ $a_n = 61$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{61 - 23}{2} + 1 = 19 + 1 = 20$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (23 + 61) = 1400$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \left(\frac{46}{2} + \frac{38}{2} \right) = 1400$$



تمرین: مجموع ۳۰ جمله‌ی اول اعداد فرد را محاسبه کنید.

۱, ۳, ۵, ۷, ...

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$S_{30} = ? = \frac{30}{2} (1 + 59) = \frac{30}{2} \times 60 = 900$$



تمرین: اگر عرض نخستین پله نردبانی ۱۲۵ سانتیمتر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتیمتر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتیمتر کوتاهتر از پله پیشین باشد، برای ساخت همه پله ها، به چند متر چوب احتیاج است؟

$$125, \overset{-10}{\rightarrow} 115, \dots, 45$$

$$n = \frac{45 - 125}{-10} + 1 = 1 + 1 = 9$$

$$S_9 = \frac{9}{2} \left(\overset{250}{2(125)} + \overset{-10}{1(-10)} \right) = \frac{9}{2} \times 170 = 765 \text{ سانتی متر}$$

(۱۰) \leftarrow ۷۶۵ متر



تمرین: در یک سالن سینما ردیف های اول تا سوم به ترتیب ۱۵، ۱۸ و ۲۱ صندلی دارد، اگر تعداد صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شود و در سالن ۸۷۰ صندلی موجود باشد، این سینما چند ردیف صندلی دارد؟

$$a_1 = 15, \quad d = 3, \quad S_n = 870$$

$$870 = \frac{n}{2} \left(2(15) + (n-1)(3) \right)$$

$$870 = \frac{n}{2} (2n + 17)$$

$$\times 2 \rightarrow 1740 = n^2 + 17n \quad \div 4 \rightarrow n^2 + 9n - 210 = 0$$

$$(n + 29)(n - 20) = 0$$

$$n = -29$$

$$n = 20$$



دنباله هندسی: در این دنباله هر جمله از جمله قبل به نسبتی ثابت یا بیشتر یا کمتره. این نسبت ثابت همیشه «نسبت مشترک» شرط دنباله هندسی اینه که جمله اول و

شرایط	نوع دنباله
$a_1 > 0$ و $r > 1$	افزایشی
$r = 1$	ثابت
$a_1 > 0$ و $0 < r < 1$	کاهشی

نسبت مشترک صفر نباشن: $a_1, r \neq 0$ $\times \frac{1}{2}$
 $200, 100, 50, 25, \dots$ $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸, ۲۹, ۳۰, ۳۱, ۳۲, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۳۷, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۱, ۴۲, ۴۳, ۴۴, ۴۵, ۴۶, ۴۷, ۴۸, ۴۹, ۵۰

a_1 $\times r = a_2$
 $2, 4, 8, 16, 32, \dots, a_n$

(۲) جمله اول: a_1

(۱) جمله n ام: a_n

(۴) نسبت مشترک: r

(۳) شماره جمله: n

تمرین: فردی یک قرص حاوی ۱۰۰ میلی گرم دارو مصرف می کند. اگر بعد از هر ساعت، مقدار دارو در بدنش نصف شود، مقدار دارو بعد از ۴ ساعت را محاسبه کنید.

$a_1 = 100$
 $r = \frac{1}{2}$
 $n = 4$

۴ بار نصف بشه
 $a_4 = ?$

$a_4 = a_1 \times r^4 = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 100 \times \frac{1}{16} = 6.25$



معادله توانی ← دو طرف پایه ها یکسان باشند

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$$

تمرین: در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک ۲ جمله ی چندم برابر با ۹۶ است؟

$$a_n = 96$$

$$r = 2$$

$$n = ?$$

$$a_1 = 3$$

$$2^{n-1} = \frac{96}{3} = 32 \rightarrow 2^{n-1} = 32 = 2^5$$

حالا که پایه ها برابره پس توان هم برابر

$$n-1 = 5$$

$$\boxed{n = 6}$$



نسبت مشترک
برائنده

$$r = \frac{a_n}{a_m} = \frac{1}{r^{n-m}} \Rightarrow r = \frac{1}{r^{n-m}}$$

تمرین: جملات چهارم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۴ و ۱۰۸ هستند، نسبت مشترک چند است؟

$$r^{7-4} = \frac{108}{4} \rightarrow r^3 = 27 = 3^3$$

چون توان برابر پس پایه ها برابرند

$$r = 3$$



$$a_{n+1} = r a_n \quad ; a_1$$

تمرین: رابطه‌ی بازگشتی دنباله‌های زیر را بنویسید.

$\overset{\times 2}{\curvearrowright}$
۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ...

$\overset{\times \frac{1}{10}}{\curvearrowright}$
۱۰۰۰, ۱۰۰, ۱۰, ۱, ...

$$a_{n+1} = a_n \times 2$$

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{10}$$

$$a_1 = 1000$$



$$a, b, c \left. \vphantom{a, b, c} \right\} \Rightarrow b^2 = ac$$

$$2b = a + c$$

حسابی: $4, b, 9$

(Handwritten notes: $+2.5$ above 4, $+9.5$ above b, $+2.5$ above 9)

تمرین: واسطه‌ی حسابی و هندسی ۴ و ۹ کدام است؟
 $2b = 4 + 9 \rightarrow 2b = 13 \rightarrow b = 6.5$

هندسی: $4, b, 9$

(Handwritten notes: $+2.5$ above 4, $+2.5$ above b, $+2.5$ above 9)

$$b^2 = 4 \times 9 \rightarrow b^2 = 36$$

$$b = 6$$

$$b = -6$$

تمرین: اگر $x, x+2, x+3$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار x را بیابید.

$$b^2 = ac$$

$$(x+2)^2 = x(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x \Rightarrow 4x - 3x = -4$$

$$x = -4$$



$$S_n = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) \quad \text{یا} \quad S_n = a_1 \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

تمرین: مجموع ده جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی که نسبت مشترک آن -2 و جمله‌ی اول آن ۳ است را بیابید.

$$S_{10} = 3 \times \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 3 \times \frac{1023 - 1}{-3} = -1023$$

$$a_1 = 5$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$S_4 = ?$$

$$S_4 = 5 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 5 \times \frac{\frac{1}{16} - 1}{-\frac{1}{2}} = 5 \times \frac{\frac{1 - 16}{16}}{-\frac{1}{2}} = 5 \times \frac{\frac{-15}{16}}{-\frac{1}{2}} = \frac{75}{16} \times 2 = \frac{75}{8}$$



توان: برای خلاصه نویسی و ساده کردن عملیات ضرب از توان استفاده می کنیم: مثلاً

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$

توان = خلاصه شده ضرب

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 7 \times 2$$

ضرب = خلاصه شده جمع



قوانین توان: ۰^{-۲}

۱) «صفر به توان صفر» و «صفر به توان عددی منفی»، تعریف نشدن. «صفر به توان عددی

مثبت»، صفره.

$$0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$$

۲) هر عددی به توان یک برابر با خودش ^ا کوفت = ^ا کوفت

$$2^0 = 2^1 = 2$$

$$2^0 = 1$$

۳) عدد a که $(a \neq 0)$ به توان صفر برسد برابر با ۱ است: $a^0 = 1$ ☆

۴) ضرب و تقسیم عدد توان دار:

عنوان	نمایش ریاضی	مثال
ضرب با پایه های برابر	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$3^2 \times 3^3 = 3^5$
تقسیم با پایه های برابر	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$10^0 \div 10^2 = 10^{-2}$
ضرب با توان های برابر	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	$5^4 \times 6^4 = 30^4$
تقسیم با توان های برابر	$a^n \div b^n = (a \div b)^n$	$40^3 \div 8^3 = 5^3$



۵) در تساوی عبارات توانی اگر پایه‌ها مساوی باشند، توان‌ها هم مساوی هستند و برعکس.

$$a^n = a^m \Rightarrow n = m$$

مثال: $5^x = 5^7 \rightarrow x = 7$

$$a^n = b^n \Rightarrow a = b$$

مثال: $x^3 = 3^3 \rightarrow x = 3$



۶) به توان رسیدن یک عدد توان دار: **توان های متوالی در هم ضرب می شن:**

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

مثال: $(5^2)^4 = 5^8$

۷) اگر پایه رو معکوس کنیم، توان قرینه میشه: (پایه $\neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ توان).

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال: $2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ مثال: $(3^2)^{-2} = 3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$



۸) مجموع و تفاضل اعداد توان دار: هیچ قانونی برای جمع و تفریق اعداد توان دار نداریم. فقط باید مقدار اعداد توان دار رو حساب کنیم و بعدش جمع و تفریق کنیم:

مثال: ~~$۲^۳ + ۲^۵ =$~~

$۴ + ۳۲ = ۳۶$

مثال: $۵^۷ + ۵^۷ + ۵^۷ = ۳ \times ۵^۷$

$a + a + a = ۳a$



معادلات توانی: x توی توانه. برای حل باید یه کاری کنیم که پایه ها برابر باشن، در این صورت توان ها با هم برابرن.

تمرین: اگر $2^{2x} = 64$ باشد، مقدار x کدام است؟

$$2^x = 2^6$$

$$2x = 6 \rightarrow x = 3$$

تمرین: از معادله ی توانی $(\frac{5}{36})^4 \times (\frac{36}{100})^x \times (\frac{5}{6})^4 = (\frac{100}{36})^{-7}$ مقدار x کدام است؟

توان قدرتی

پایه ها مساوی

$$(\frac{5}{36})^{4+x+4} = (\frac{100}{36})^{-7}$$

$$x + 8 = 7$$

$$x = -1$$



تمرین: از معادله‌ی توانی $\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 35 \times 3} = 5^1$ مقدار x کدام است؟

$$\frac{x^5 \times 3^2 \times 5^3}{3^2 \times 5 \times 7 \times 3} = 5^1$$

$$\frac{x^5 \times 5^2}{5 \times 7} = 5^1$$

$$\frac{x^5}{7} = 5^1$$

$$x^5 = 7 \times 5^1$$

$$x^5 = 35$$

$$x = 35^{1/5}$$

$x = 15$

$5 = 5^1$



$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

توان های گویا: اگر $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی:

تمرین: طرف دوم تساوی های زیر را طبق الگوی فوق بنویسید.

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^1}$$

$$32^{\frac{-2}{5}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^2} = \sqrt[5]{\frac{1}{1024}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1024}}$$

$$\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$$

$$\sqrt[2]{5^1} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{25}} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{5}} = 25^{-\frac{1}{5}}$$

۲ = همی د
۱ = همی د
کوت

تمرین: یک بانک به مبلغ ۱۰۰ میلیارد ریال سپرده گذاری به مدت یک سال کامل ۲۰ درصد سود می دهد، اگر پس از گذشت ۸ ماه، نیاز به محاسبه سود باشد، درصد سود چگونه محاسبه می شود.

سال کامل + ۲۰%

$$\times 1,2^1 = 1,2^{\frac{12}{12}}$$

سر ۸ ماه $\times 1,2^{\frac{8}{12}}$

سر ۱۵ ماه $\times 1,2^{\frac{15}{12}} = \sqrt[4]{1,2^{15}}$

سر ۱۸ ماه $\times 1,2^{\frac{18}{12}}$



ساده شدن توان و فرجه:

$$\sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$\sqrt[4]{2^4} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

توان و فرجه زوج بودن باید برای جواب قدر مطلق بذاریم



ریشه گیری:

الف) ریشه های زوج عدد مثبت a به صورت $+\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ هستند. برای اعداد منفی ریشه های زوج نداریم.

اعداد مثبت a
 ریشه های زوج $\rightarrow +\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$
 ریشه های فرد $\rightarrow \sqrt[n]{a}$
مثال: ریشه های چهارم عدد ۱۶ را بنویسید. $+\sqrt[4]{16} = 2$ و $-\sqrt[4]{16} = -2$

اعداد منفی a
 ریشه های زوج نداریم \rightarrow وجود ندارد
 ریشه های فرد $\rightarrow \sqrt[n]{a}$
ب) ریشه های فرد عدد a به صورت $\sqrt[n]{a}$ هستند. فرقی نداره a مثبت باشه یا منفی.

مثال: ریشه های پنجم عدد ۳۲ را بنویسید. $\sqrt[5]{-32} = -2$

ریشه های هفتم عدد ۱۴۰۰ را بنویسید.

$$\sqrt[7]{1400}$$

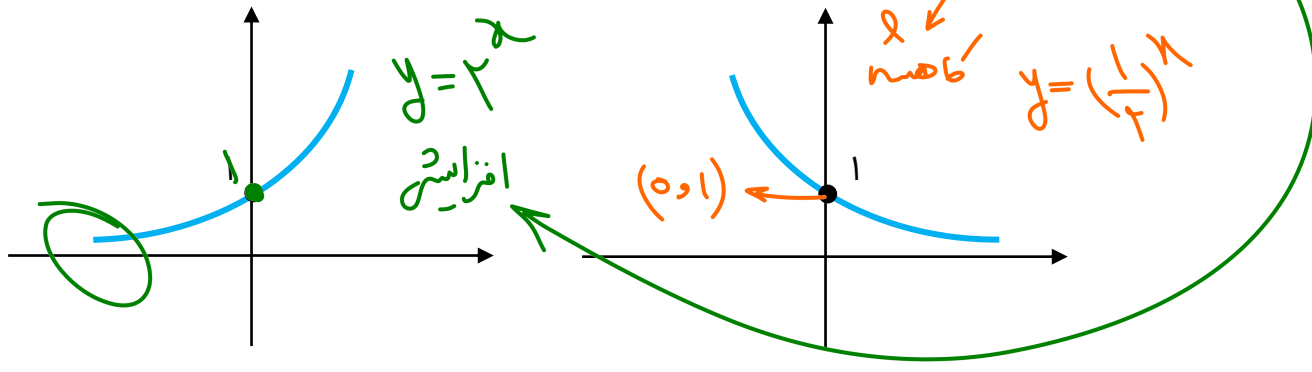
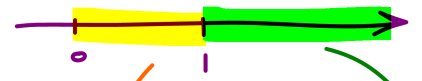


تابع نمایی: به فرم کلی $f(x) = a^x$ تعریف میشه که در اون پایه عددی حقیقی مثبت و مخالف یک است و توان (نما) مجهول. با توجه به مقدار a (پایه) تابع نمایی دو مدل داره

$$y = a^x$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(x) = a^x \end{cases} ; a \neq 1 \text{ و } a > 0$$

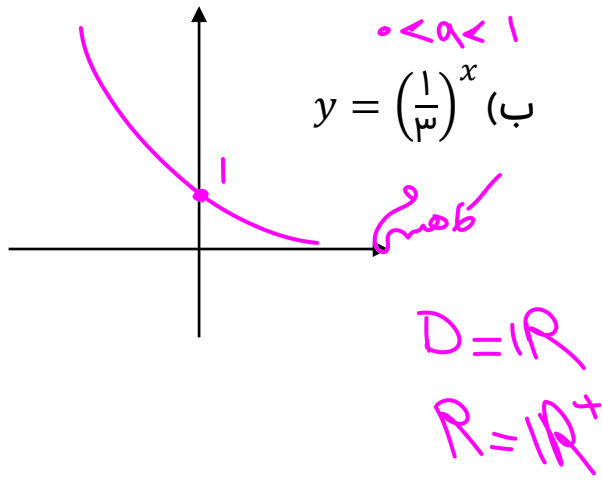
مثبت و مخالف



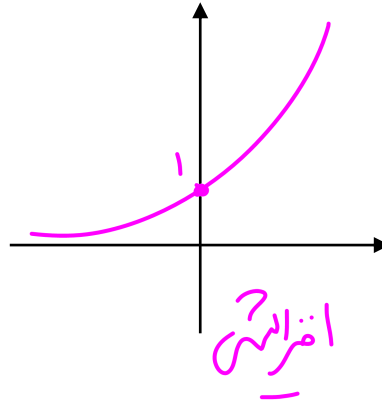


تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید کدام صعودی و کدام نزولی

است؟



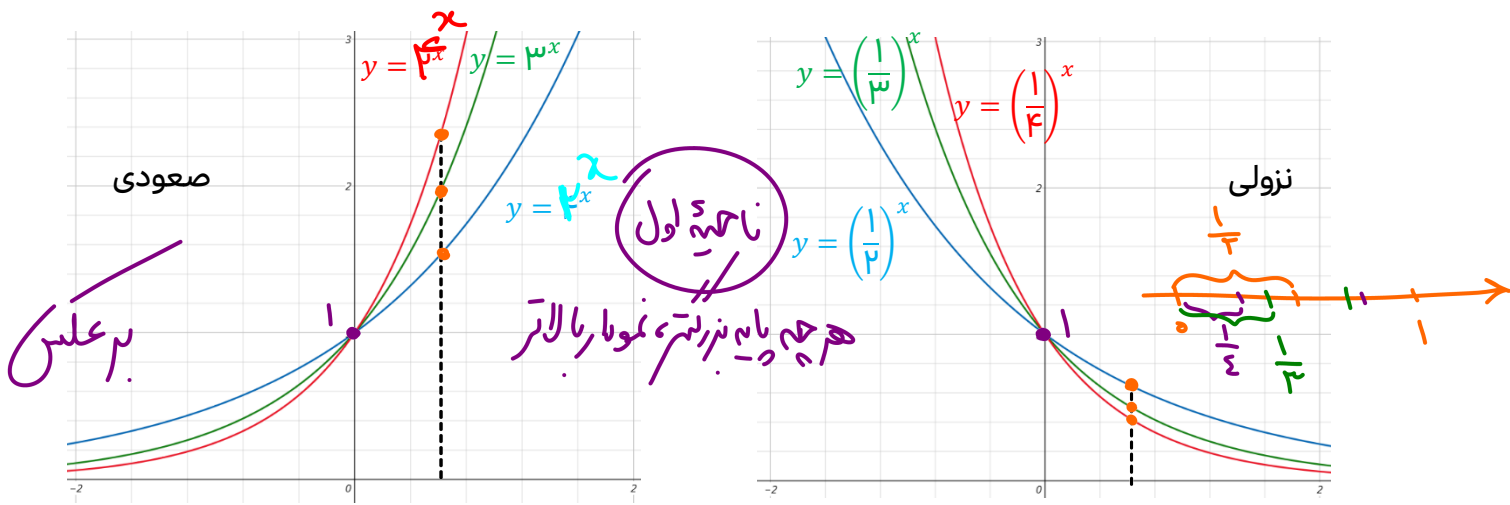
الف) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$





نکته: بررسی چند نمودار نمایی همزمان:

در ناحیه اول هر چه پایه بزرگتر باشه نمودار تابع بالاتره؛ در ناحیه دوم برعکسه!





رشد و زوال نمایی: برخی پدیده های طبیعی با افزایش مقدار (رشد) یا کاهش مقدار (زوال) همراه هستند، رشد و زوال یک سری از پدیده ها به صورت نمایی رخ می دهد و ما میتونیم با یه تابع نمایی اونو بررسی کنیم. جهت درک بهتر این مفهوم مثال زیر رو بررسی می کنیم:

تومان ۱,۰۰۰,۰۰۰ = مقدار سپرده

۲۰٪ = سو سالانه

$$1,000,000 (1 + 0,2)^t$$

$$\frac{20}{100} = 0,2$$



$r = 3\%$

$$20,000 (1 - 0,03)^t = 20,000 \times 0,97^t$$

$$\frac{30}{100} = 0,3$$

$$\frac{3}{100} = 0,03$$

فرم کلی تابع رشد و زوال:

$$f(t) = c(1 \pm r)^t$$

رشد (upward arrow) and زوال (downward arrow) are indicated near the plus and minus signs respectively.

در این فرمول: c = مقدار اولیه
 r = درصد تغییرات (آهنگ تغییرات)
 t = شمارندهی زمان (متغیر)

نرخ ۱,۸ درصد

$$\frac{1,8}{100} = 0,018$$



تمرین: جمعیت روستایی در سال ۱۳۹۶ حدود ده هزار نفر است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ ۵ درصد در حال افزایش باشد، جمعیت روستا در سال ۱۳۹۸ چقدر می باشد؟

$$t = 2$$

+

$$r = \frac{5}{100}$$

$$= 0.05$$

$$f(t) = 10000 \left(1 + \frac{5}{100} \right)^2 = 11025$$



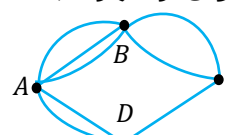
تمرین: یک فروشگاه اینترنتی آماری ارائه داده است که بر اساس آن در هر ساعت ۱۰ درصد از کفش های موجود در انبارش به فروش می رسد. اگر موجودی انبار ۲۰۰۰ جفت کفش باشد، پس از ۵ ساعت چند جفت کفش در انبار باقی می ماند؟

$$r = 0,1$$

$$f(5) = 2000 \left(1 - \frac{0,1}{0,1}\right)^5 = 2000 \times 0,99^5 = 1902 \text{ کفش}$$



امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳

<p>۰/۵</p>	<p>۱</p> <p>درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) دنباله‌ی $1, 4, 9, 16, \dots$ یک دنباله حسابی است. ✗ ب) هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه‌ی S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ در این صورت، دو پیشامد A و B ناسازگار هستند. ✓</p>
<p>۱</p>	<p>۲</p> <p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، \dots می‌گویند. ب) احتمال اینکه از بین سه نفر دوست، تولید هیچ دو تای آنها در یک فصل نباشد، برابر است با $\frac{3}{8}$. ج) ریشه‌های چهارم عدد ۷ برابر است با $\sqrt[4]{7}$ و $-\sqrt[4]{7}$.</p>
<p>۰/۷۵</p>	<p>۳</p> <p>گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه‌ی $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ که شامل عدد ۷ باشد، کدام است؟ ۴(۴) ۶(۳) ۸(۲) ۱۰(۱) ب) اگر اندازه‌گیری وزن افراد با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده باشد، اجرای نادرست کدام گام از چرخه آمار است؟ ۱) بیان مسئله ۲) طرح و برنامه‌ریزی ۳) گردآوری و پاکسازی داده‌ها ۴) تحلیل داده‌ها ج) ضابطه‌ی تابعی دنباله‌ی $\dots, -\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ کدام گزینه است؟ $a_n = \frac{n}{n+1}$ $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ $a_n = \frac{-n}{n+1}$ $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$</p>
<p>۰/۷۵</p>	<p>۴</p> <p>متابقی شکل زیر، میان چهار شهر راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر D سفر کرد؟  $B \rightarrow A \rightarrow D = 6$ $B \rightarrow C \rightarrow D = 2$ Total = 8</p>
<p>۱/۲۵</p>	<p>۵</p> <p>با ارقام ۱، ۰، ۳، ۵، ۷، ۹ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهار رقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ $\frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}{101} = 48$ $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}{101} = 60$ Total = 108</p>
<p>۱</p>	<p>۶</p> <p>هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۹ را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به صورت تصادفی یک کارت بر می‌داریم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف) عدد روی کارت، اول باشد ولی بزرگتر از ۴ نباشد. ب) عدد روی کارت، مجذور کامل و فرد باشد. $A = \{2, 3\}$ $B = \{1, 9\}$</p>



۲	<p>گروه المپیاد ادبی شهری، شامل ۵ دانش آموز دختر و ۴ دانش آموز پسر است. می خواهیم به طور تصادفی ۳ نفر را از بین آنها انتخاب کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:</p> <p>(الف) دو دختر و یک پسر انتخاب شود. (ب) حداقل ۲ پسر انتخاب شده باشد.</p> $\frac{\binom{5}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10 \times 4}{84} = \frac{10}{21}$ $\frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1} + \binom{5}{3}}{84} = \frac{50}{84} = \frac{25}{42}$	۷
۰/۷۵	<p>با توجه به نمودارهای جعبه ای رسم شده به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>(الف) در کدام گروه، گزارش میانگین و انحراف معیار می تواند همراه کننده باشد؟ دوم</p> <p>(ب) دامنه ی میان چارکی کدام گروه بزرگتر است؟ اول</p> <p>(ج) در کدام گروه مقدار میانه و میانگین به هم نزدیکترند؟ اول</p>	۸
۰/۷۵	<p>با توجه به دنباله های $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ و $b_n = n^2 + 2$ حاصل عبارت $8a_3 + b_2$ را بنویسید.</p> $8 \left(-\frac{1}{4} \right) + 6 = -2 + 6 = 4$ $2^2 + 2 = 6$ $\frac{(-1)^3}{3+1} = -\frac{1}{4}$	۹
۰/۷۵	<p>در دنباله ی بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n + n$ با جمله ی اول $a_1 = 3$، چهار جمله اول را به دست آورید.</p> $n=1 \rightarrow a_2 = 2(3) + 1 = 7$ $a_3 = 2(7) + 2 = 16$ $a_4 = 2(16) + 3 = 35$	۱۰
۱/۵	<p>در یک دنباله ی حسابی، جمله ی هفتم برابر ۵۳ و جمله ی بیست و پنجم برابر ۱۰۷ است.</p> <p>(الف) جمله ی اول و اختلاف مشترک دنباله را حساب کنید. (ب) جمله ی پنجاه و یکم دنباله را مشخص کنید.</p> $d = \frac{107 - 53}{25 - 7} = \frac{54}{18} = 3$ $a_7 - 6d = a_1 = 53 - 6(3) = 35$ $a_{51} = a_1 + 50d = 35 + 50(3) = 185$	۱۱
۱	<p>بین اعداد ۷ و ۲۷ سه عدد را طوری قرار دهید که این پنج عدد با هم، تشکیل دنباله ی حسابی افزایشی دهند.</p> <p>$7, 12, 17, 22, 27$</p> $d = \frac{27 - 7}{5 - 1} = \frac{20}{4} = 5$	۱۲



۱	<p>مدت زمان مطالعه‌ی روزانه‌ی دانش‌آموزی در درس ریاضی و آمار بر حسب دقیقه به صورت دنباله‌ی زیر است. $10, 15, 20, 25, \dots$ مجموع مدت زمان مطالعه‌ی دانش‌آموز در شانزده روز اول را بیابید. (با استفاده از فرمول مجموع)</p> $S_{14} = \frac{14}{2} (20 + 15) = 7 \times 35 = 245$	۱۳
۱/۲۵	<p>برای دنباله هندسی مقابل:</p> $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \dots$ <p>الف) نسبت مشترک و جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید. ب) رابطه‌ی بازگشتی آن را مشخص کنید.</p> $r = \left(\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ $a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{5}, \quad a_1 = \frac{1}{2}$	۱۴
۱/۵	<p>جمله‌ی اول یک دنباله هندسی ۵ و نسبت مشترک آن ۲ است. الف) جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۶۴۰ است؟ ب) با استفاده از فرمول، مجموع نه جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.</p> $2^{n-1} = \frac{640}{5} \Rightarrow 2^{n-1} = 128 = 2^7$ $n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$ $S_9 = 5 \times \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 5 \times 511 = 2555$	۱۵
۱	<p>عبارت تواندار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.</p> <p>الف) $5\sqrt[4]{35}$ ب) $\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ ج) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{6}\right)^3}$ د) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$</p>	۱۶
۱/۵	<p>حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. ($a > 0$)</p> $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^{-6} = \frac{a^{\frac{1}{3} \times (-6)}}{a^{\frac{1}{6} \times (-6)}} = \frac{a^{-2}}{a^{-1}} = a^{-2+1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$	۱۷
۰/۷۵	<p> نمودار تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.</p> <p>افزایشی</p> $D = IR$ $R = IR^+$	۱۸
۱	<p>شخصی چهار میلیون تومان در یک شرکت تولیدی در راستای حمایت از تولید ملی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در پایان هر سال ۳۰ درصد سود علی‌الحساب به او پرداخت شود، پس از دو سال سرمایه‌ی او چقدر خواهد شد؟</p> $f(x) = 40,000,000 \left(1 + \frac{30}{100}\right)^2 = 40,000,000 \times 1.3^2 = 67,600,000$	۱۹
۲۰		



امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴

۰/۷۵	<p>درستی یا نادرستی هر یک از جمله‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) تعداد کل جایگشت‌های ۵ شیء متمایز برابر ۵! است. ✓</p> <p>(ب) دنباله‌ی ... , ۱۰, ۶, ۳, ۱ یک دنباله‌ی حسابی است. ✗</p> <p>(پ) اعداد +۲ و -۲ ریشه‌های چهارم عدد -۱۶ هستند. ✗</p>	۱
۰/۷۵	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>(الف) اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه $A \cap A'$ یک پیشامد <u>زیبایی</u> است. (حتمی-نشدنی)</p> <p>(ب) در پرتاب یک تاس، زوج آمدن و فرد آمدن عدد رو شده، دو پیشامد هستند. (ناسازگار-سازگار)</p> <p>(پ) رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = 5a_n, a_1 = 1$ بیانگر جملات یک دنباله‌ی است. (حسابی-هندسی)</p>	۲
۱	<p>به سوالات زیر پاسخ کوتاه دهید.</p> <p>(الف) فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و یک سکه چند عضو دارد؟ $n(S) = 2 \times 6 = 12$</p> <p>(ب) احتمال اینکه سارا فردا به گردش علمی نرود $0/2$ است. احتمال اینکه او فردا به گردش علمی برود، چقدر است؟ $P(A) + P(A') = 1 \rightarrow P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$</p> <p>(پ) وقتی داده‌ی دورافتاده، بین داده‌های آماری باشد، کدام معیار گرایش به مرکز برای توصیف داده‌ها مناسب‌تر است؟ $a_n = n^2$ میانگین</p> <p>(ت) جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ... , ۱۶, ۹, ۴, ۱ را بنویسید. (در امتداد نرود) <u>میانگین</u> <u>اخران معیار</u> <u>دامنه میان چارگی</u></p>	۳
۱	<p>با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟</p> <p>$\frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 3} = 18$ $\frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 3} = 20$ بتکرار</p>	۴
۰/۷۵	<p>مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه‌ی چهار عضوی دارد؟</p> <p>$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$</p>	۵
۱	<p>در پرتاب دو تاس، پیشامد اینکه «مجموع اعداد رو شده برابر ۶ بوده، ولی آن دو عدد برابر نباشند» را با اعضا بنویسید.</p> <p>$\{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2)\}$</p>	۶
۱/۲۵	<p>از کیسه‌ای که شامل ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی قرمز است، ۲ مهره به طور تصادفی برمی‌داریم. احتمال اینکه هر دو مهره از یک رنگ باشند، را به دست آورید.</p> <p>$\frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6 + 3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$</p>	۷



۰/۷۵	<p>یک تاکسی دارای ۳ سرنشین است، احتمال اینکه هر سه نفر آنها در ماه خرداد متولد شده باشند، چقدر است؟</p> $P(A) = \frac{1 \times 1 \times 1}{12 \times 12 \times 12} = \frac{1}{12^3}$	۸										
۰/۷۵	<p>با توجه به گام‌های چرخه‌ی آمار در حل مسایل، هر یک از جملات ستون A را به یک عبارت مناسب از ستون B مرتبط کرده و بنویسید. (در ستون B، یک مورد اضافی است.)</p> <table border="1" data-bbox="164 495 1465 741"> <thead> <tr> <th>ستون B</th> <th>ستون A</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>طرح و برنامه‌ریزی</td> <td>الف) نتایج به دست آمده را تفسیر و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.</td> </tr> <tr> <td>تحلیل داده‌ها</td> <td>ب) به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.</td> </tr> <tr> <td>گردآوری داده‌ها</td> <td>پ) با استفاده از معیارها و نمودارها، نتایج را متناسب با هدف‌ها گزارش می‌کنیم.</td> </tr> <tr> <td>بحث و نتیجه‌گیری</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	ستون B	ستون A	طرح و برنامه‌ریزی	الف) نتایج به دست آمده را تفسیر و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.	تحلیل داده‌ها	ب) به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.	گردآوری داده‌ها	پ) با استفاده از معیارها و نمودارها، نتایج را متناسب با هدف‌ها گزارش می‌کنیم.	بحث و نتیجه‌گیری		۹
ستون B	ستون A											
طرح و برنامه‌ریزی	الف) نتایج به دست آمده را تفسیر و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.											
تحلیل داده‌ها	ب) به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.											
گردآوری داده‌ها	پ) با استفاده از معیارها و نمودارها، نتایج را متناسب با هدف‌ها گزارش می‌کنیم.											
بحث و نتیجه‌گیری												
۱/۷۵	<p>الف) با توجه به دنباله‌های $a_n = 5^{n-4}$ و $b_n = \frac{6}{2n-1}$ حاصل عبارت $9b_5 - a_4$ را به دست آورید.</p> $9\left(\frac{6}{9}\right) - 1 = 9 - 1 = 8$ $\frac{6}{2(5)-1} = \frac{6}{9}$ $5^{4-4} = 5^0 = 1$ <p>ب) جملات دوم، سوم و چهارم دنباله‌ی بازگشتی $a_1 = 1$، $a_{n+1} = 2a_n + 1$ را بنویسید.</p> $\begin{aligned} n=1 \rightarrow a_2 &= 2(1) + 1 = 3 \\ a_3 &= 2(3) + 1 = 7 \\ a_4 &= 2(7) + 1 = 15 \end{aligned}$	۱۰										
۱/۲۵	<p>جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی حسابی ۱۴ و جمله‌ی دهم آن ۴۹ است. جمله‌ی اول و اختلاف مشترک این دنباله را با نوشتن راه حل به دست آورید.</p> $d = \frac{49 - 14}{10 - 3} = \frac{35}{7} = 5$ $a_3 - 2d = a_1 = 14 - 2(5) = 4$	۱۱										
۲	<p>در پاسخ به موارد این سوال، نوشتن فرمول الزامی است.</p> <p>الف) در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول ۴ و اختلاف مشترک آن ۳ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۱۴۸ است؟</p> $n = \frac{148 - 4}{3} + 1 = \frac{144}{3} + 1 = 48 + 1 = 49$	۱۲										



	<p>(ب) در یک سالن، در ردیف اول ۱۰ صندلی، ردیف دوم ۱۳ صندلی و ردیف سوم ۱۶ صندلی چیده است. اگر صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، آنگاه مجموع صندلی های چیده شده در ۲۰ ردیف اول را حساب کنید.</p> <p>۱۰, ۱۳, ۱۶, ...</p> $S_{20} = \frac{10}{2} \left(\frac{20}{2} + 19 \right) = 770$	
۲	<p>دنباله هندسی ... ۳, ۶, ۱۲, ... را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:</p> <p>(الف) جمله عمومی این دنباله را بنویسید.</p> <p>(ب) حاصل عبارت $\frac{a_{10}}{a_7}$ را به دست آورید.</p> <p>(پ) مجموع شش جمله اول این دنباله را با استفاده از فرمول حساب کنید.</p> <p>$r=2, a_1=3$ $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ $\frac{a_{10}}{a_7} = \frac{3 \times 2^9}{3 \times 2^6} = 2^3 = 8$ $S_6 = 3 \times \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 3 \times 63 = 189$</p>	۱۳
۱/۲۵	<p>هر یک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.</p> <p>(الف) $\sqrt[6]{25} = 2^{\frac{5}{6}}$ (ب) $\sqrt[8]{5/17} = 5^{\frac{1}{8}} \cdot 17^{-\frac{1}{8}}$ (پ) $11^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{11^7}$ (ت) $6^{-\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{\frac{1}{6}}$</p>	۱۴
۱/۵	<p>حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.</p> <p>(الف) $\sqrt[5]{\frac{1}{5}} \times \sqrt[5]{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{4/5}$ (ب) $(2^{-6})^{-\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$ (پ) $24^{\frac{1}{2}} \times (1/5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{24/5} = \sqrt{4.8} = 2\sqrt{1.2} = 2\sqrt{3/5}$</p>	۱۵
۱/۲۵	<p>نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ در شکل مقابل رسم شده است. به سوالات زیر پاسخ د</p> <p>(الف) با افزایش مقدار x، مقدار y افزایش می یابد یا کاهش؟ <i>کاهش</i></p> <p>(ب) این تابع محور y ها را در چه نقطه ای قطع کرده است؟ <i>(۰, ۱)</i></p> <p>(پ) مقدار این تابع را برای $x = 2$ به دست آورید.</p> <p>$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$</p>	۱۶
۱	<p>جمعیت یک روستا ۴۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۱۰ درصد در سال افزایش یابد، آنگاه جمعیت این روستا بعد از ۲ سال چند نفر خواهد شد؟</p> <p>$f(2) = 4000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = 4000 \times 1.21 = 4840$</p>	۱۷
۲۰		