



# تحليل امتحان نهایی ریاضی و آمار ۲

مهندس رؤف مهرخواه





امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ - نوبت عصر

۰/۷۵

$$\begin{cases} T \Rightarrow F \equiv F \\ F \Rightarrow T \equiv T \end{cases} \quad \begin{cases} p \vee \sim p \equiv T \\ p \Rightarrow p \equiv T \\ p \wedge \sim p \equiv F \end{cases}$$

$$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$$

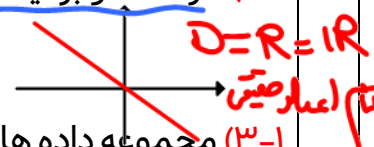
درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید:  
 (۱-۱) گزاره شرطی  $p \Rightarrow \sim p$  همواره درست است ~~X~~

$$f(x) = x \quad D = R$$

(۲-۱) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند، آن تابع همانی است ~~X~~

تربیع اعداد باشد نگاه داشته و در آن با هم برابر است

مثال نقض:  $y = -x$



(۳-۱) مجموعه داده هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می شوند را سری زمانی گویند ✓

تربیع اعداد باشد نگاه بردار و برعکس

$$D = R \quad R = \{c\}$$

۰/۷۵

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید:

(۱-۲) در ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$ ، اگر  $p$  نادرست باشد، گزاره شرطی ..... دارای ارزش درست است.

در صورت خاص که در ستون اول از شرطی ...  
 برای مشخص کردن تابع معکوس

$$F \Rightarrow \dots \equiv T \quad T \Rightarrow F \equiv F$$

$$\dots \Rightarrow T \equiv T$$

(۲-۲) اگر  $x \in \mathbb{Z}$  باشد، حاصل عبارت  $x + [-x] = \dots$  خواهد بود.

$$x \in \mathbb{Z} : [4] = 4 \quad [-5] = -5$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[3] + [-3] = 0$$

$$[-4, 2] + [4, 2] = -1$$

$$x \notin \mathbb{Z} : [2, 5] = 2 \quad [-1, 9] = -1$$

(۳-۲) معیار آماری که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد ... گویند.

جمله ای خبری که قابلیت صدق و کذب دارد:  $\frac{P}{T} = 2$

۰/۷۵

گزینه درست را انتخاب کنید:

(۱-۳) اگر تعداد حالت ها در جدول ارزشی برابر ۳۲ حالت باشد، تعداد گزاره ها برابر است با:

تعداد گزاره ها  
 ۲ گزاره ۸ حالت ارزشی  
 ۳ گزاره ۸ حالت ارزشی  
 ۴ گزاره ۱۶ حالت ارزشی

تعداد حالت ها =  $2^n = 32 \Rightarrow n = 5$

Sign(x) بیگانه

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

(۲-۳) اگر  $x = 3$  باشد آنگاه حاصل  $\text{sign}(-x)$  برابر کدام است؟

الف) ۱ (ب) -۳ (ج) ۳ (د) -۱

$$\text{Sign}(-x) = \text{Sign}(-3) = -1$$

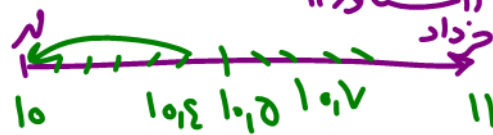
(۳-۳) کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه ای و ۲۰ درصد کلمه سخت، مناسب چه پایه ای است؟

شخص خوانایی - میزان سکوئیت در خواندن

الف) دهم (ب) یازدهم (ج) نهم (د) هشتم

تفاوت میانگین تعداد در جمله + در هر کلمه در هر کلمه

$$= (0,14 \times 20 + 0,86 \times 8) = 11$$



$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv T$      $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$



۱/۲۵ اگر  $p$  گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره مرکب زیر را مشخص کنید:

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

۲ عددی اول است.  $T$     ۲ عددی اول نیست.  $F$     ۲ عددی گنگ است.  $F$

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

۱/۵ درستی هم ارزی زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

دو طرفه نقطه برای معنی رضایی زیرشماره!

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

۰/۷۵ الف) گزاره «مجموع مکعبات دو عدد، بزرگتر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است» را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.  $a$  و  $b$

ب) نام استدلال زیر چیست؟ درستی یا نادرستی آنرا بررسی کنید.

آزش معتقد است که «هر کس مرا دوست دارد، عیوب مرا به من می‌گوید. از طرفی سعید عیوب مرا به من گفته است، پس سعید مرا دوست دارد.»

مغالطه: هرگز نادرست باشد

مغالطه: هرگز نادرست باشد

ارزش: می‌تواند نادرست باشد

ارزش: نادرست

۲  $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$  تابع  $f(x)$  را رسم کنید. سپس حاصل عبارت  $f(\sqrt{2}) + f(3)$  را بدست آورید.

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2$

$f(3) = 5$

$\rightarrow 2 + 5 = 7$



<p>۸</p>	<p>اگر <math>A = \{(4, m+n), (m, 2), (7, m-n)\}</math> ثابت باشد، مقادیرهای <math>m, n</math> را بیابید.</p> <p><math>m+n=2</math>  <math>m-n=2</math>  <math>\rightarrow 2m=4 \rightarrow m=2</math>  <math>n=0</math></p>
<p>۹</p>	<p>نمودار تابع الف را به کمک انتقال و نمودار تابع ب را در محدوده خواسته شده رسم کنید.</p> <p>الف) <math>y =  x  - 2</math>          ب) <math>y = [x] \quad 1 \leq x &lt; 2</math></p> <p><math>K \leq x &lt; K+1 \Leftrightarrow [x] = K</math></p>
<p>۱۰</p>	<p>اگر <math>f = \{(1,1), (3,4), (4,5), (0,1)\}</math> و <math>g = \{(2,-1), (3,-7), (1,0)\}</math> باشد، آنگاه حاصل توابع زیر را بیابید.</p> <p>الف) <math>\frac{f}{g}</math>          ب) <math>f - g</math></p> <p><math>D_f = \{1, 3, 4, 0\}</math>  <math>D_g = \{2, 3, 1\}</math>  <math>D = D_f \cap D_g = \{3, 1\}</math></p> <p><math>f - g = \{(3, 11), (1, -1)\}</math></p> <p><math>\frac{f}{g} = \{(3, \frac{4}{-7}), (1, \frac{5}{0})\}</math></p>
<p>۱۱</p>	<p>اگر <math>f(x) = 3x - 1</math> و <math>g = \{(1,0), (-1,3), (3,7)\}</math> باشد، آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید.</p> <p>الف) <math>D_{f-g}</math></p> <p><math>D_g = \{1, -1, 3\}</math>  <math>D_f = \mathbb{R}</math>  <math>D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, -1, 3\}</math></p> <p>ب) <math>(2f)(-3g)(1)</math></p> <p><math>(2f)(1) = 5</math>  <math>(-3g)(1) = -3(0) = 0</math>  <math>5 \cdot 0 = 0</math></p>
<p>۱۲</p>	<p>اگر <math>f(x) =  x </math> و <math>g(x) =  x </math> باشد، نمودار <math>\frac{f}{g}</math> را رسم کنید.</p> <p><math>f(x) =  x  \rightarrow D_f = \mathbb{R}</math>  <math>g(x) =  x  \rightarrow D_g = \mathbb{R}</math>  <math>D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}</math></p> <p><math>(\frac{f}{g})(x) = \frac{ x }{ x } = 1</math></p>



۱۳ اگر درآمد ماهیانه افراد یک شرکت بر حسب میلیون تومان بصورت زیر باشد، با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانگین، چند نفر زیر خط فقر قرار می گیرند.

حد اقل درآمد این برای ماه زندگی

۱, ۸, ۶, ۱, ۲, ۳, ۱, ۱, ۶, ۸, ۹

بنج نفر

$$\bar{x} = \frac{42}{11} = 4.2$$

$$\text{میانگین} = \frac{4.2}{2} = 2.1$$

۱۴ در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل اند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار می باشند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) حداقل چند شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر ۵ درصد باشد؟

$$\frac{\text{بیکار}}{\text{فعال}} \times 100 = \frac{200}{1400} \times 100 = 14.28\%$$

$$\frac{200 - x}{1400} \times 100 = 5 \Rightarrow 200 - x = 70 \Rightarrow x = 130$$

دنبال کاره / منطقه / مورد بیکاره

۱۵ اگر سبد هزینه‌ی خانواری در سال پایه از دو کالا نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، شاخص بهای نان و گوشت را به دست آورید.

$$CPI = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{200 \times 1500 + 80 \times 7000}{200 \times 1000 + 80 \times 5000} \times 100 = \frac{290000}{200000} \times 100 = 145$$

دردت ترم =  $\frac{\text{قبل} - \text{بعد}}{\text{قبل}} \times 100$

تغییرات قیمت کالا در طول زمان

$$\text{دردت ترم} = \frac{7000 - 5000}{5000} \times 100 = 40\%$$

$$CPI = \frac{70000}{50000} \times 100 = 140$$



امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ - غایبین

۱ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

(۱-۱) ارزش گزاره «اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس» نادرست است.

اگر  $f(x)$  یک تابع ثابت باشد، آنگاه  $f(kx) = kf(x)$  درست است.

(۲-۱) اگر  $f(x) = 2x^2$  و  $f(3x) = 2(3x)^2 = 18x^2$  و  $3f(x) = 3(2x^2) = 6x^2$  پس  $f(3x) \neq 3f(x)$  نادرست است.

(۳-۱) شاخص، یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می‌دهد.

تدریس: شاخص نسبی، شاخص جی، شاخص پی، شاخص لورنتس

۲ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(۱-۲) اگر ۴ گزاره داشته باشیم، تعداد حالت‌ها در جدول ارزشی ..... ۱۶ ..... حالت است.

(۲-۲) اگر  $x \notin \mathbb{Z}$  حاصل عبارت  $x + [-x] = \dots$  خواهد بود.

(۳-۲) تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده را ..... می‌گویند.

تخمین:  $[x] = \lfloor x \rfloor$

مثال:  $[2.1] = 2$ ,  $[-3.5] = -4$

تخمین:  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0$   
 $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$

۳ گزینه درست را انتخاب کنید:

(۱-۳) برای ترکیب فصلی دو گزاره  $p$  و  $q$  از حرف ربط ..... استفاده شده و آنرا با نماد  $p \dots q$  نمایش می‌دهند.

الف) و - و (ب) و - و (ج) یا - و (د) یا - و

(۲-۳) اگر  $-1 \leq x < 1$  باشد آنگاه حاصل  $|x| + 1 = y$  کدام است؟

الف) ۰ (ب) -۱ (ج) -۲ (د) ۲

(۳-۳) برای محاسبه نماتوپ کدام روش صحیح است؟

الف) نسبت وزن بر حسب کیلوگرم به قد بر حسب متر  
 ب) نسبت وزن بر حسب کیلوگرم به مربع قد بر حسب متر  
 ج) نسبت وزن بر حسب کیلوگرم به قد بر حسب سانتی متر  
 د) نسبت مربع وزن بر حسب کیلوگرم به مربع قد بر حسب متر

نماتوپ:  $K \leq x < K+1 \Leftrightarrow [x] = K$

مثال:  $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$



۴ اگر  $p$  گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش گزاره‌ی مرکب زیر را مشخص کنید:

$(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

$(\sim T \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \Leftrightarrow F)$

$T \Leftrightarrow F \equiv F$

۵ درستی هم ارزی زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

$p$	$q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

هم ارزی درست

۶ الف) گزاره‌ی «هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگتر یا مساوی با آن است.» را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

$\lambda \geq \frac{1}{\lambda}$  و  $\lambda \neq 0$

ب) عکس و نقیض گزاره زیر را بنویسید و آن را اثبات کنید.

«اگر  $n^2$  زوج باشد، آنگاه  $n$  زوج است.» ( $n \in \mathbb{Z}$ )

نقیض: «اگر  $n^2$  زوج باشد، آنگاه  $n$  فرد است.» ( $n \in \mathbb{Z}$ )

اثبات:  $n = 2k + 1$

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$

پس  $n^2$  فرد است.

۷ نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$  را رسم کنید. سپس حاصل عبارت  $f(1)$  را به دست آورید.

$f(1) = -2(1) = -2$

۸ اگر تابع  $f = \{(a - 2, 6), (b - 2, 7), (\frac{c}{3}, 3)\}$  یک تابع همانی باشد، مقدار  $2a - b + c$  چقدر است؟

$a - 2 = 6 \rightarrow a = 8$

$b - 2 = 7 \rightarrow b = 9$

$\frac{c}{3} = 3 \rightarrow c = 9$

$2(8) - 9 + 9 = 19$

سوال اگر  $n$  فرد باشد آنگاه  $n$  فرد است  $n \in \mathbb{Z}$

اگر  $n$  زوج باشد آنگاه  $n$  زوج است  $n \in \mathbb{Z}$

$$n = 2k$$
$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$$



۹ نمودار تابع «الف» را در محدوده خواسته شده و نمودار تابع «ب» را به کمک انتقال با استفاده از تابع  $y = |x|$  رسم کنید.

نشان افتر خدمت طلبت  
انتقال قرینه نسبت به محور

الف)  $-2 \leq x < -1$   
 $[x] = -2$

ب)  $y = |x + 3|$

$y = |x|$   
 $y = |x + 3|$   
 $y = -|x + 3|$

۱۰ اگر  $f = \{(-1, 4), (3, 6), (1, 5)\}$  و  $g = \{(-1, 0), (2, 1), (1, 7)\}$  باشند، حاصل توابع زیر را بیابید:

الف)  $f - g$   
ب)  $\frac{f}{g}$

$D_{f-g} = \{1, -1\}$   
 $f - g = \{(1, -2), (-1, 4)\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{1, -1\}$   
 $\frac{f}{g} = \{(1, \frac{5}{7})\}$

$D_f \cap D_g = \{1, -1\}$   
 $D_f \cup D_g = \{-1, 1, 2, 3\}$

۱۱ اگر  $f(x) = x^2$  و  $(\frac{f}{g})(x)$  به صورت نمودار روبرو باشد، ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  را به دست آورید.

$y = ax + b \rightarrow y = 2x$

نقطه  $(1, 2)$

نقطه  $(0, 0)$

میدول  $= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$

$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x \Rightarrow \frac{x^2}{g(x)} = 2x \Rightarrow \frac{x^2}{2x} = g(x) = \frac{x}{2}$

۱۲ اگر درآمد ماهیانه ۹ نفر از افراد یک اداره (بر حسب میلیون تومان) به صورت زیر باشد، با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانگین، چند نفر زیر خط فقر قرار دارند؟

۵, ۷, ۱۰, ۸, ۵, ۹, ۱۱, ۱۴, ۱۵

میانگین  $= \frac{14}{9} = 9,1\bar{1}$

خط فقر  $= \frac{9,1\bar{1}}{2} = 4,55$

هولس زیر خط فقر

۱۳ در یک منطقه ۱۳۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل اند. در این منطقه ۴۰۰ نفر بالای ۱۶ سال و بیشتر جویای کار می‌باشند:

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟  
ب) حداقل چند شغل ایجاد شود تا نرخ بیکاری در این منطقه برابر سه درصد باشد.

شغل = ۱۳۰۰  
فعل = ۱۷۰۰  
بیکار = ۴۰۰

نرخ بیکار  $= \frac{400}{1700} \times 100 = 23,52\%$

$400 - x = 1100 \Rightarrow 400 - 11 = 1100 - 11 = 1089 = x$



۱۴

برای کتابی با متوسط طول جملات ۷ کلمه‌ای و ۱۹ درصد کلمه سخت:

(الف) شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید: 
$$\left( \frac{0.19 \times 19}{19} + \frac{0.81 \times 7}{7} \right) = 0.19 + 0.81 = 1$$

(ب) این کتاب مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟ 
$$10 = 0.19(26) = 0.19(26) = 10$$

۱۵

در یک مرکز خرید تعداد مشتریان بین ساعت ۱۱ الی ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است:

ساعت T	تعداد مشتری N
۱۱	۷۵۰
۱۳	۸۰۰
۱۵	۶۵۰
۱۷	۳۰۰
۱۹	۵۰۰
۲۱	۲۵۰

(الف) تعداد مشتریان را در ساعت ۱۶ درون‌یابی کنید.

۲

$$y = -15x + b$$

$$450 = -15(15) + b \rightarrow b = 2250$$

$$y = -15x + 2250$$

$$y = -15(16) + 2250 = -240 + 2250 = 2010$$

(ب) اگر تعداد دقیق مشتریان در ساعت ۱۶ برابر ۴۰۰ باشد، خطای درون‌یابی را به دست آورید.

$$|400 - 2010| = 1610$$