فاینال

هندسه یازدهم با استاد ایمان ساریخانی

۲۰- تبدیل که در آن طول پاره‌خط حفظ شود را تبدیل طول پا می‌گوییم.

۲۱- در تبدیل ایزومتری اندازه‌ی زاویه نیز حفظ می‌شود.

۲۲- بازتاب یک تبدیل ایزومتری است.

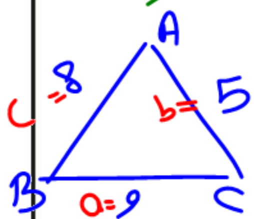
۲۳- در بازتاب جهت شکل حفظ می‌شود.

۲۴- در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب .... باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

۲۵- تجانس اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.

۲۶- تبدیل T را ......همانی...... می‌گوییم هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه‌ی P داشته باشیم. P(A)=A

۲۷- در هر مثلث نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه رو به رو به آن ضلع برابر است با ......قطر...... دایره ......محیطی......



۲۸- اگر در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $a^2 > b^2 + c^2$ باشد آنگاه زاویه $\hat{A}$ .....منفرجه..... است.

۲۹- اگر در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، AB=8، AC=5 و BC=9 آنگاه مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ......هاده الزاویه...... است.

81 $9^2 < 8^2+5^2$

$64+25 = 89$

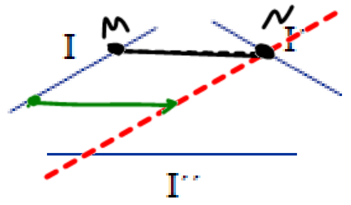
$a^2 > b^2+c^2 \iff \boxed{\hat{A} > 90^\circ} \to \cos\hat{A} < 0 \xrightarrow{\times(-2bc)} -2bc\cdot\cos\hat{A} > 0 \xrightarrow{+(b^2+c^2)} \underbrace{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}}_{a^2} > b^2+c^2$

$a^2 > b^2+c^2$ ✓

$a^2 < b^2+c^2 \iff \hat{A} < 90$

$a^2 = b^2+c^2 \iff \hat{A} = 90^\circ$

۱۳- سه خط دو به دو ناموازی I و I' و I'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی I و I' و موازی I'' باشد.



خط I را با بردار انتقال 5cm و موازی با I'' انتقال داده تا خط I' را در نقطه‌ی N قطع کند

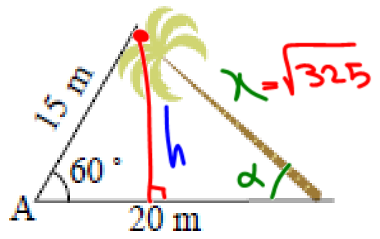
از N خطی موازی I'' رسم کرده تا I را در M قطع کند، پاره خط MN مورد نظر است.

۱۴- یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه °۶۰ دیده می‌شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین



$$x^2 = 15^2 + 20^2 - \cancel{2} \times 15 \times 20 \times \cancel{\cos 60^\circ}$$

$$225 + 400 - 300 = 325$$

ب) $\dfrac{15}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{325}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\sin\alpha = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{325}}$$

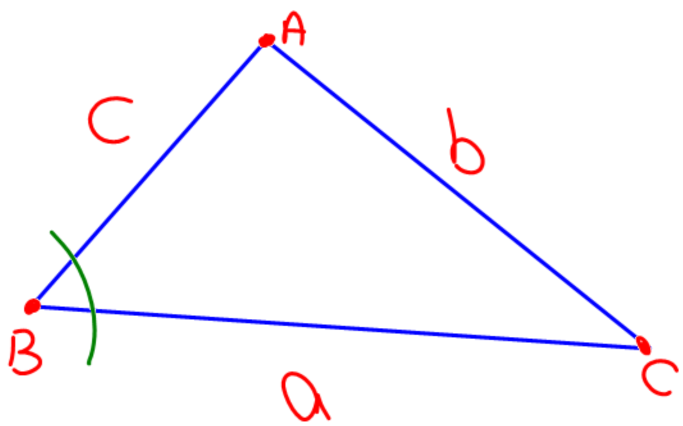
پ) $\sin 60^\circ = \dfrac{h}{15} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$h = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\hat{A}$

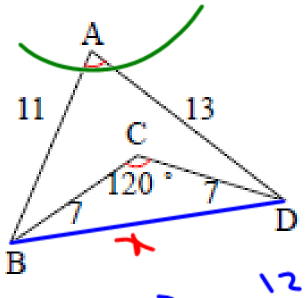
$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos\hat{B}$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2a.b.\cos\hat{C}$



۱۶- در شکل، اولاً اندازهٔ زاویهٔ A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهار ضلعی ABCD را بیابید.

راهنمایی: B را به D وصل کنید.



$\overset{\triangle}{BCD}: x^2 = \underbrace{7^2}_{49} + \underbrace{7^2}_{49} \underset{+}{-} 2 \times \underbrace{7 \times 7}_{49} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 147$

$\overset{\triangle}{ABD}: \overset{147}{x^2} = \overset{121}{11^2} + \overset{169}{13^2} - 2 \times 11 \times 13 \times \cos \hat{A}$

$\Rightarrow -143 = -286 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \frac{1}{2} \longrightarrow \hat{A} = 60°$ ✓

$\alpha + \beta = 180 \Rightarrow \cos\alpha = -\cos\beta$

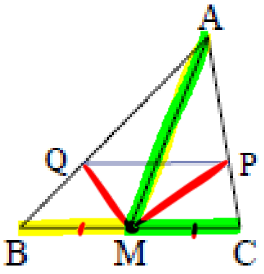
$S_{ABCD} = S_{ABC} - S_{BCD}$

$= \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 60} - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 120}$

$= \frac{143\sqrt{3}}{4} - \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{94\sqrt{3}}{4} = \frac{47\sqrt{3}}{2}$

۱۷- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB؛ هستند؛ ثابت کنید:

$PQ \| BC$



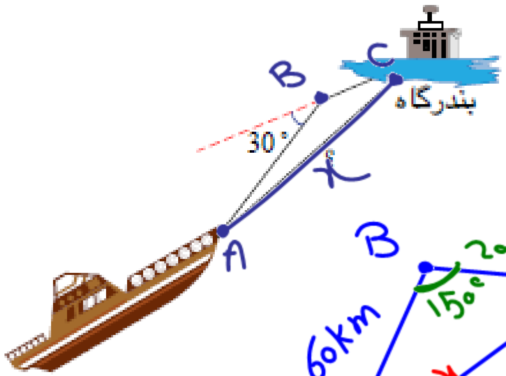
$\overset{\triangle}{AMB}$: نیمساز MQ $\Rightarrow \boxed{\dfrac{AM}{MB}} = \boxed{\dfrac{AQ}{QB}}$

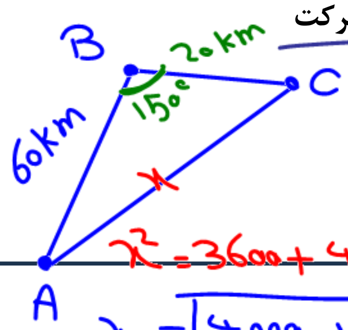
$\overset{\triangle}{AMC}$: نیمساز MP $\Rightarrow \boxed{\dfrac{AM}{MC}} = \boxed{\dfrac{AP}{PC}}$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

طبق عکس تالس $\Longrightarrow PQ \| BC$ ✓

۱۸- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟





$$x^2 = 3600 + 400 - 2 \times 60 \times 20 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = \sqrt{4000 + 1200\sqrt{3}}$$

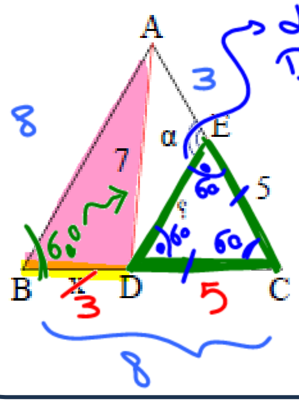
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$v = 60\,\frac{km}{h} = \frac{AB}{1h} \Rightarrow AB = 60km$$

$$v = 40\,\frac{km}{h} = \frac{BC}{\frac{1}{2}h} \Rightarrow BC = 20km$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$$

۲۰- در مثلث متساوی اللاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ (CD>BD) نقطه E، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویه AED چند درجه است؟



$\alpha = 120^\circ$

$DE = 5$

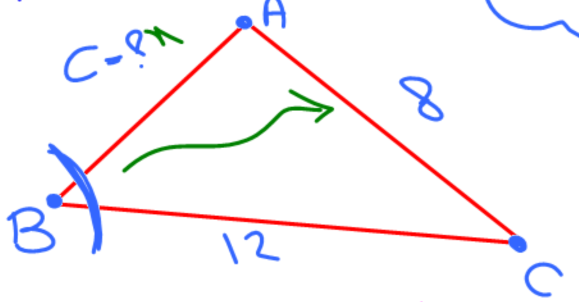
$7^2 = 8^2 + x^2 - \cancel{2} \times 8 \times x \times \cos 60$

$49 = 64 + x^2 - 8x \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-3)(x-5) = 0$

$x = 3 \qquad x = 5$

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ، اگر $a=12$ ، $b=8$ و $\cos\hat{B} = \frac{3}{4}$ باشد، اندازه‌ی c را بیابید.



64   144

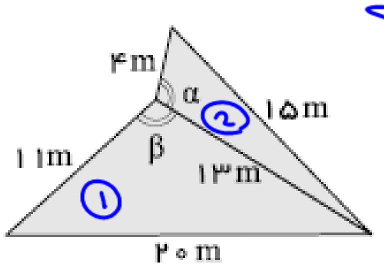
$8^2 = 12^2 + x^2 - 2 \times \cancel{12}^{3} \times x \times \left(\frac{3}{\cancel{4}}\right)$

$\Rightarrow x^2 - 18x + 80 = 0 \longrightarrow (x-10)(x-8) = 0$

$x = 10 \qquad x = 8$

۲۱- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟ نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌ای برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$

$P_1 = \frac{44}{2} = 22$



$S_1 = \sqrt{22(22-11)(22-20)(22-13)} =$

S_2

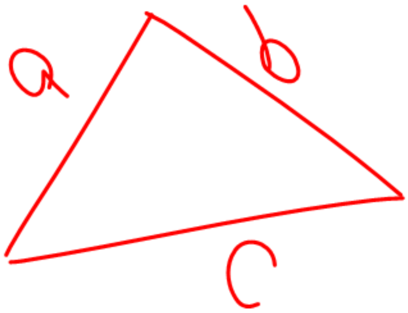
$S = S_1 + S_2$

① $S = \frac{1}{2} \times$ ارتفاع $\times$ قاعده

② $S = \frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب دو ضلع $\times \sin$ (زاویه بین)

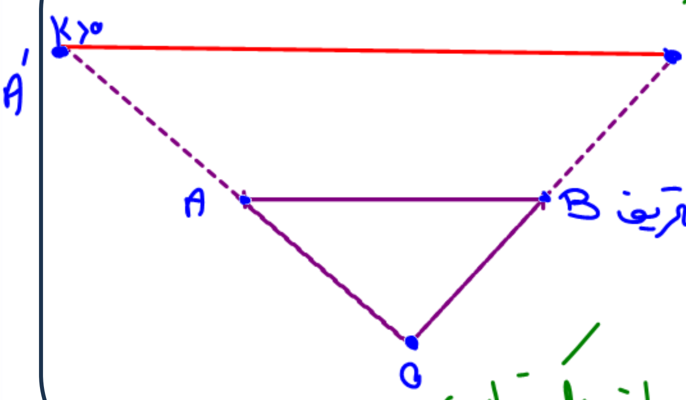
③ $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

نصف محیط



۲۵- ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند. $\boxed{K>0}$

با مرکز O و $K>0$ متجانس پاره خط AB را رسم می‌کنیم



طبق تعریف: $\begin{cases} \dfrac{OA'}{OA}=K \\ \dfrac{OB'}{OB}=K \end{cases} \Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}$

$\xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} AB \parallel A'B' \Longrightarrow m_{AB} = m_{A'B'}$ ✓

* ثابت کنید در حالتی که $K>0$ باشد، اندازه‌ی زاویه در تجانس حفظ می‌شود.

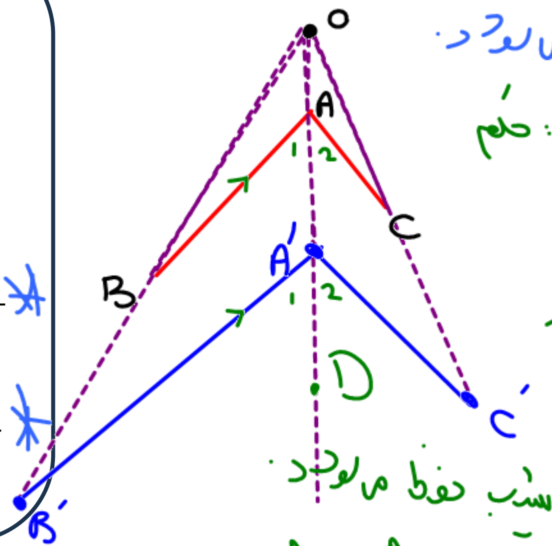
حکم: $\hat{A} = \hat{A'}$

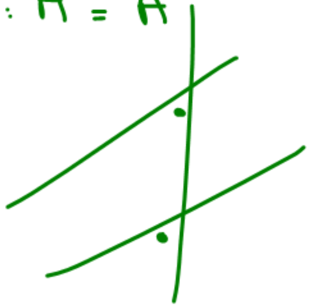
طول پایسته نیست / زمانی طول‌ها ثابت است $K=\pm1$ یا $|K|=1$

جهت را حفظ نمی‌کند

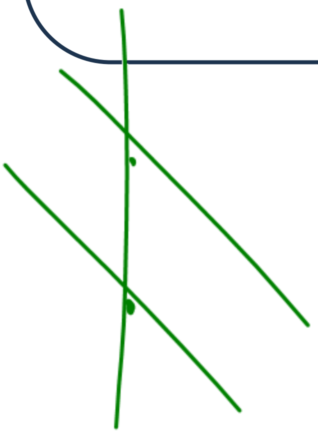
* شیب همواره حفظ می‌شود.

* زاویه همواره حفظ می‌شود





* می‌دانیم در تجانس شیب حفظ می‌شود.

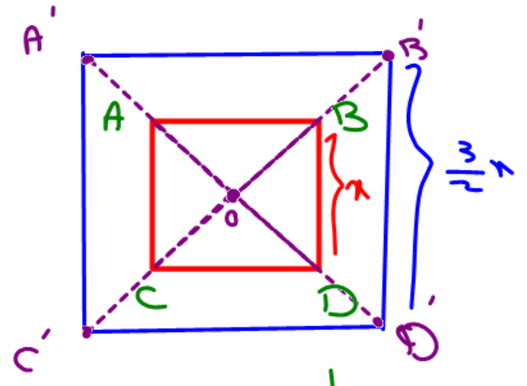


$AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{مورب } OD} \hat{A}_1 = \hat{A'}_1$

$AC \parallel A'C' \xrightarrow{\text{مورب } OD} \hat{A}_2 = \hat{A'}_2$ +

$\hat{A} = \hat{A'}$ ✓

٢٦- به مرکز تانس محل برخورد قطرهای یک مربع و با ضـــریب تجانس $k = \frac{3}{2}$ متجانس آن را رســـم کنید و نسبت مساحت بین دو مربع و مربع کوچکتر را بیابید.



$S_{بین} = S_{ب} - S_{ک}$

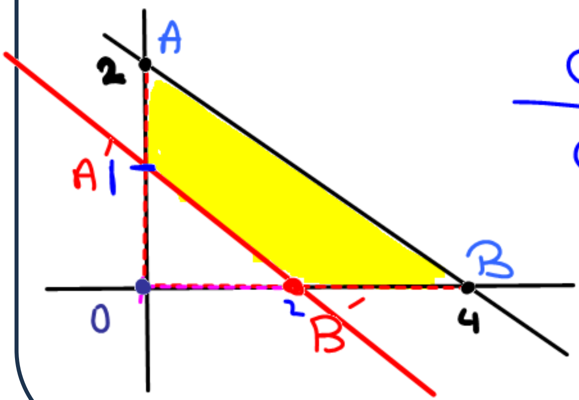
$= \frac{9}{4}x^2 - x^2 = \frac{5}{4}x^2$

$\frac{S_{بین}}{S_{ک}} = \frac{\frac{5}{4}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{5}{4}$

* اگر $k=+1$ تجانس

تبدیل همانی می‌شود

۲۷- در شـکل زیر به مرکز O و با ضـریب تجانس $k = \frac{1}{2}$ متجانس خط را رسـم کنید و مسـاحت بین دو خط را بیابید.

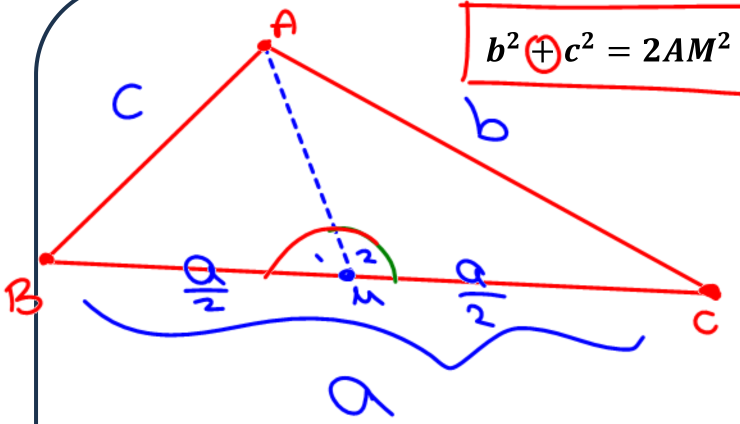


$$\frac{OA'}{OA} = k \Rightarrow \frac{OA'}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA' = 1$$

$$\frac{OB'}{OB} = k \Rightarrow \frac{OB'}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow OB' = 2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times 4 - \frac{1}{\cancel{2}} \times 1 \times \cancel{2} = 3$$

۲۸- در مثلث ABC با میانه AM ثابت کنید $\boxed{b^2+c^2=2AM^2+\frac{a^2}{2}}$



$\hat{M}_1+\hat{M}_2=180^\circ \Rightarrow \cos\hat{M}_1=-\cos\hat{M}_2$

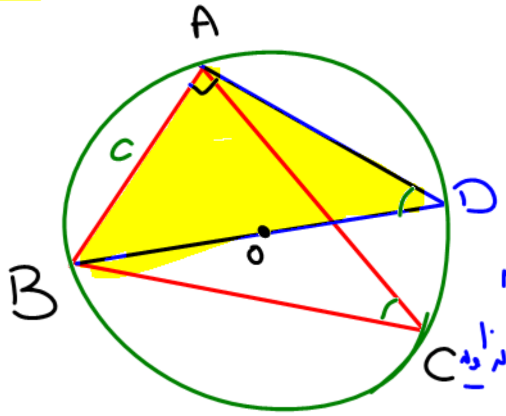
$\overset{\triangle}{AMC}: b^2=\boxed{AM^2}+\frac{a^2}{4}-2\times AM\times\frac{a}{2}\times\cos\hat{M}_2$

$\overset{\triangle}{AMB}: c^2=\boxed{AM^2}+\frac{a^2}{4}-2\times AM\times\frac{a}{2}\times\cos\hat{M}_1$

$2\times\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

$b^2+c^2=2AM^2+\frac{a^2}{2}$

قضیه: در هر مثلث نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر دایره محیطی.

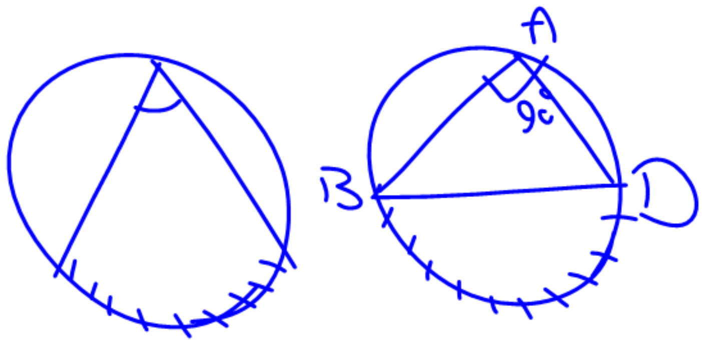


حکم: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

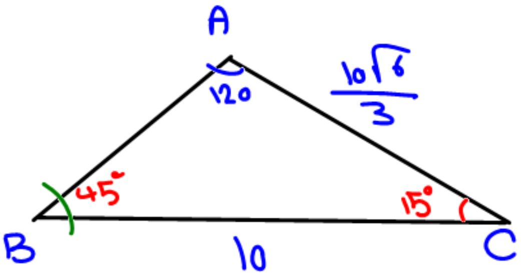
* قطر BD را رسم کرده و مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ را پیدا می‌کنیم زاویه مقابل روبه‌رو قطر، ۹۰° است پس مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ قائم‌الزاویه

$\sin \hat{D} = \frac{AB}{2R} \xrightarrow{\hat{C} = \hat{D} = \frac{AB}{2}}$

$\sin \hat{C} = \frac{AB}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$



مثال ۱: در مثلث ABC، $BC = ۱۰cm$ و $\hat{A} = ۱۲۰^{\circ}$ و $AC = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را بدست آورید.



$$2R = \frac{10}{\sin 120} = \frac{\frac{10}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

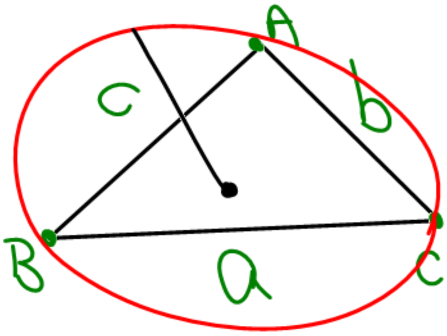
$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{10}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{10}{\underbrace{\boxed{\sin 120^{\circ}}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \cancel{10} \sin \hat{B} = \frac{\cancel{10}\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

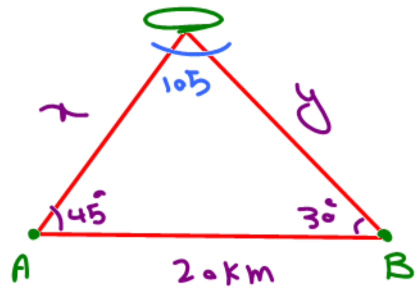
$$\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightsquigarrow \hat{B} = 45^{\circ}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



مثال ۲: دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه بدست آورید.



$$\frac{20}{\sin 105} = \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ}$$

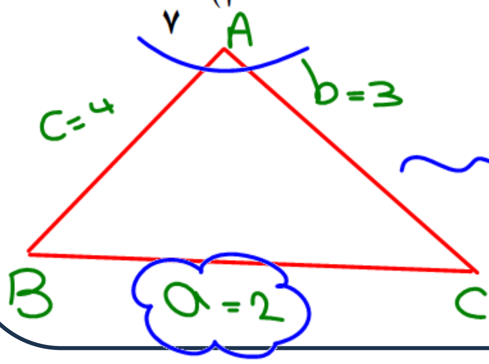
$$x = \frac{20 \times \cancel{\sin 30^\circ}}{\sin 105^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{40}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

$$y = \frac{20 \cancel{\sin 45^\circ}}{\sin 105^\circ} = \frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60+45) = \sin 60 \cdot \cos 45 + \sin 45^\circ \times \cos 60 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

مثال ۹: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، اگر $a=۲$ و $b=۳$ و $C=۴$، آنگاه $\tan\hat{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۷}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۷}$



$$a^2=b^2+c^2-2b.c\cos\hat{A}$$

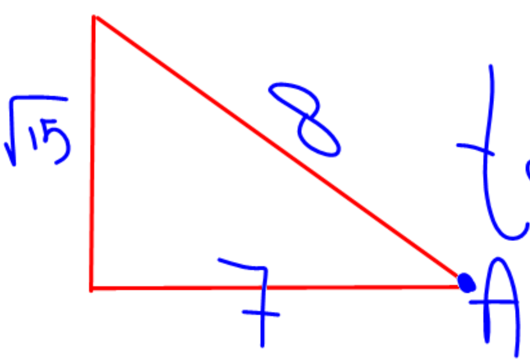
$$4=9+16-2\times3\times4\times\cos\hat{A}$$

$$-21=-24\cos\hat{A}\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{7}{8}$$

$$1+\tan^2A=\frac{1}{\cos^2A}$$

$$\tan^2A=\boxed{\frac{1}{\frac{49}{64}}}-1=\frac{64}{49}-1=\frac{15}{49}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{\sqrt{15}}{7}$$



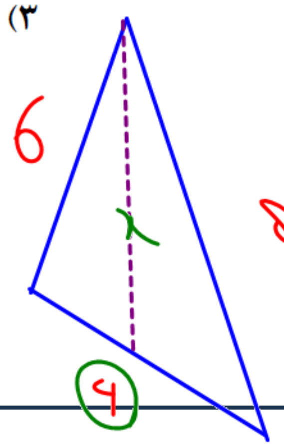
$$\tan\hat{A}=\frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{7}{8}$$

مثال ۱۰: در یک مثلث با اضلاع ۴ و ۶ و ۸ طول بزرگترین میانه کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{31}$ ۳) $\sqrt{46}$ ۴) $\sqrt{58}$

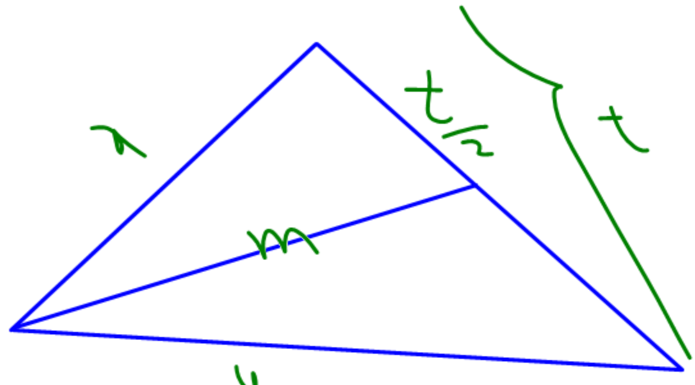
* بزرگترین میانه به کوچکترین ضلع وارد می‌شود و برعکس



$6^2+8^2=2x^2+\frac{16}{2}$

$100-8=2x^2$

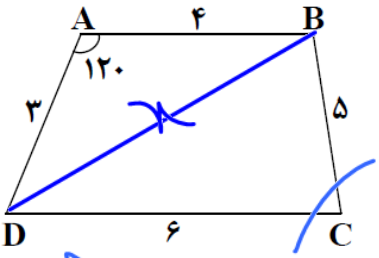
$x^2=46 \rightarrow x=\sqrt{46}$



* ۲ (میانه)^2 + نصف مربع ضلع سوم = مجموع مربعات دو ضلع *

$x^2+y^2=2m^2+\frac{t^2}{2}$

مثال ۱۱: با توجه به چهارضلعی روبه‌رو مقدار $\cos \hat{C}$ را بدست آورید.



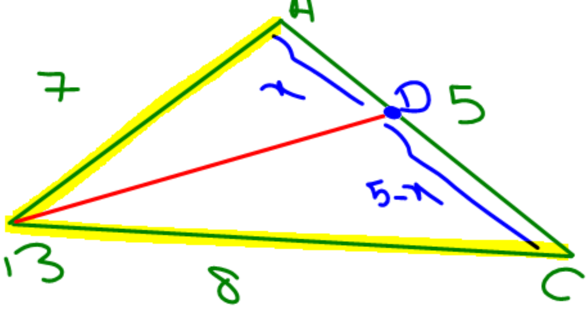
$\overset{\Delta}{ABD}: x^2 = \underbrace{9+16}_{25} - 2\times \underbrace{3\times 4}_{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{x^2 = 37}$

$\overset{\Delta}{BDC}: \overset{37}{x^2} = 36 + 25 \boxed{-2\times 6\times 5\times \cos \hat{C}}$

$-24 = -60 \cos \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{-24}{-60} = \frac{2}{5}$

مثال ۱۶: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $AB=۷$، $AC=۵$ و $BC=۸$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را بدست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می کند.



$\frac{7}{8} = \frac{x}{5-x}$

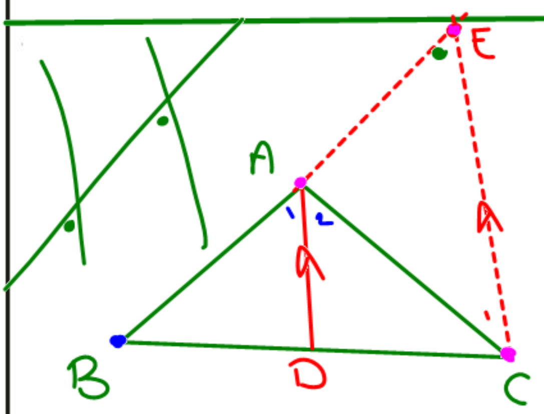
$8x = 35 - 7x$

$15x = 35 \rightsquigarrow x = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$

$AD = \frac{7}{3}$

$DC = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$ ✓

نسبت قطعه‌ها = نسبت اضلاع زاویه



حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

نسبت قطعه‌ها = نسبت اضلاع زاویه

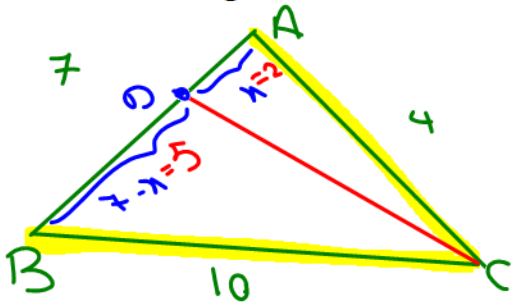
(1) از C موازی AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند

$AD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{\cancel{AE}} = \frac{BD}{DC}$

(2) $AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_2 = \hat{C}_1$

$\xrightarrow{\text{مورب } BE} \hat{A}_1 = \hat{E} \Rightarrow \hat{E} = \hat{C}_1 \xrightarrow[\text{متساوی الساقین}]{AEC} AC = AE \rightsquigarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

مثال ۱۸: در مثلث ABC، $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را بدست آورید.



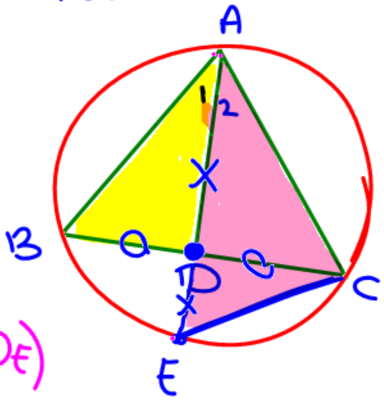
$$\frac{\cancel{4}\ 2}{\cancel{10}\ 5} = \frac{x}{7-x}$$

$$5x = 14 - 2x \rightarrow \boxed{x=2}$$

$$(\text{نیمساز})^2 = 4\times 10 - 2\times 5$$

$$CD = \sqrt{30}$$

روابط طولی در دایره : $AD \times DE = BD \times DC$



ضرب قطعه‌ها _ ضرب اضلاع زاویه $= (\text{نیمساز})^2$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{E} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{AEC}$$

$$\frac{BD}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$

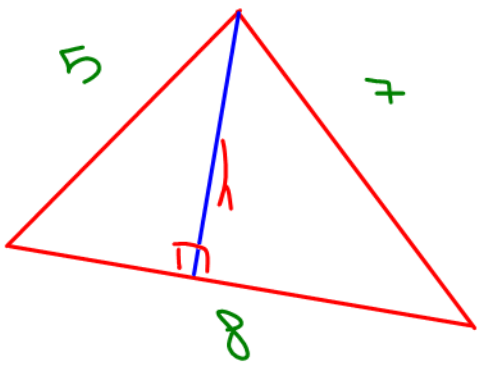
(AD×DE)

$$AD \times AE = AB \times AC$$

$$AD^2 + \boxed{AD \times DE} = AB \times AC$$

$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$

مثال ۲۴: در مثلثی به اضلاع ۵ و ۸ و ۷ ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع کدام است؟



$S = \frac{1}{2} \times h \times 8 = 4h$

$\cancel{4}h = \cancel{10}\sqrt{3}$

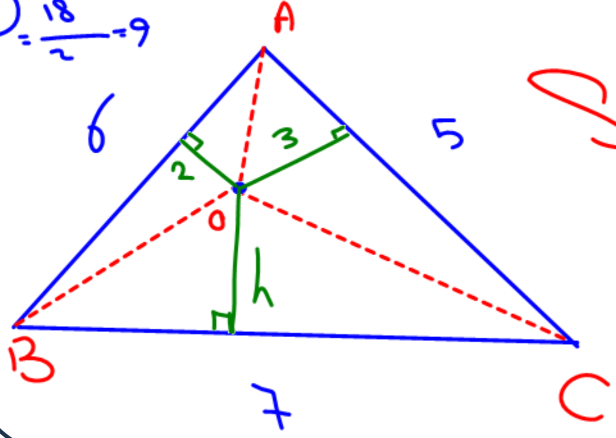
$\rightsquigarrow h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$P = \frac{5+7+8}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$S = \sqrt{10 \times (10-\cancel{8})^{2}(10-\cancel{7})^{3}(10-\cancel{5})^{5}} = 10\sqrt{3}$

مثال ۳۳: در مثلث ABC، به اضلاع ۵ و ۶ و ۷، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶ به فاصله ۳ و ۲ سانتی‌متر است، از ضلع بزرگتر چه فاصله‌ای دارد؟

$P = \frac{18}{2} = 9$



$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$

$6\sqrt{6} = \overbrace{\frac{1}{2}\times 2\times 6}^{6} + \overbrace{\frac{1}{2}\times 3\times 5}^{7/5} + \frac{1}{2}\times h\times 7$

27

$\xRightarrow{\times 2} 12\sqrt{6} = 12 + 15 + 7h$

$12\sqrt{6} - 27 = 7h \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{6} - 27}{7}$

$S = \sqrt{9(\cancel{9-7})(\cancel{9-6})(\cancel{9-5})} = 6\sqrt{6}$

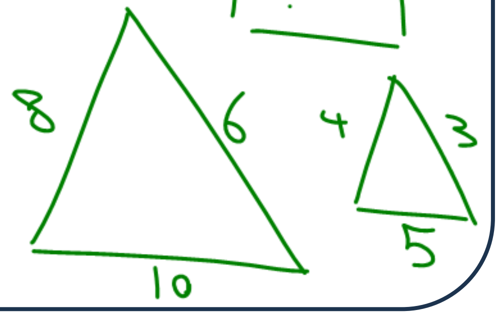
$2 \quad 3 \quad 4$

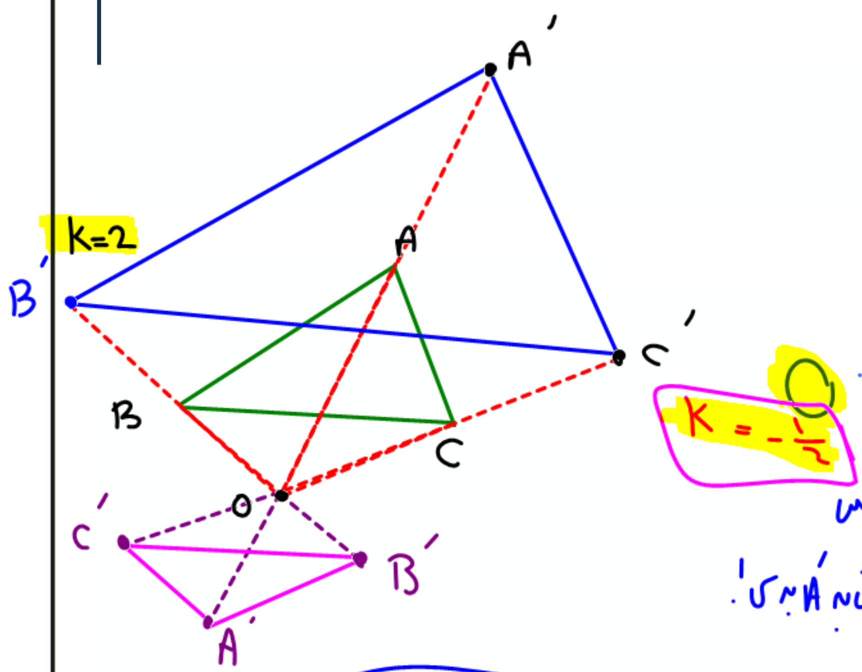
* تجانس ← چند برابر کردن

تشابه

K ← ضریب تجانس

O ← مرکز تجانس





* برای رسم تجانس:

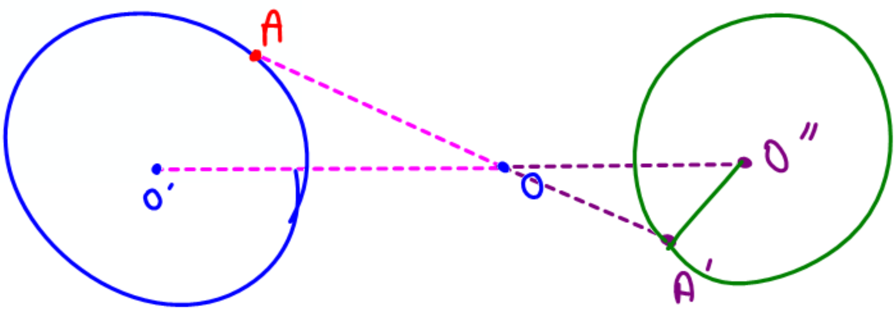
① از مرکز تجانس به رئوس وصل می‌کنی

② به اندازه‌ای که $\frac{OA'}{OA}=K$ رو دار

پیش می‌روی اگر $K>0$ بود در جهت راس

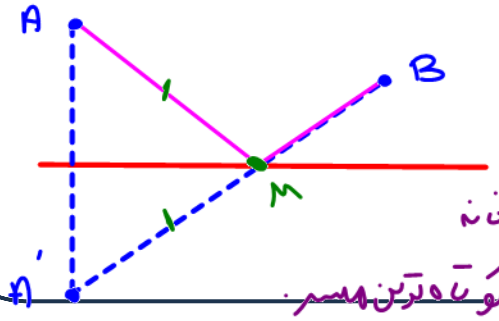
و اگر $K<0$ بود خلاف جهت راس می‌روی تا A' به دست آید!

$K=-\frac{1}{2}$



کاربرد بازتاب ← پیدا کردن کوتاه ترین مسیر
← بیشتر کردن مساحت یک شکل بدون تغییر محیط

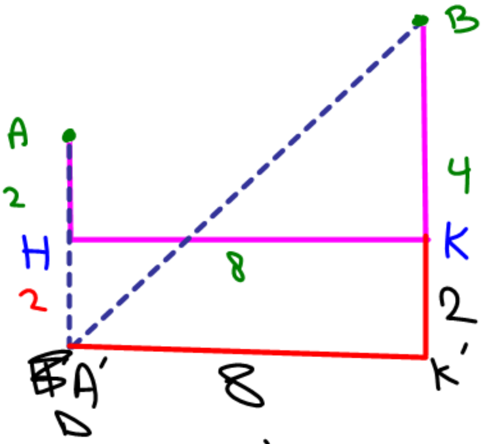
قضیه هرون:



$AM+MB$

* بازتاب نقطه ی A را نسبت به خط رودخانه پیدا می کنیم، نقطه ی برخورد $A'B$ با محور رودخانه نقطه ی مورد نظر است پس $AM+MB$ کوتاه ترین مسیر

$$AM+MB = A'M+MB = A'B$$

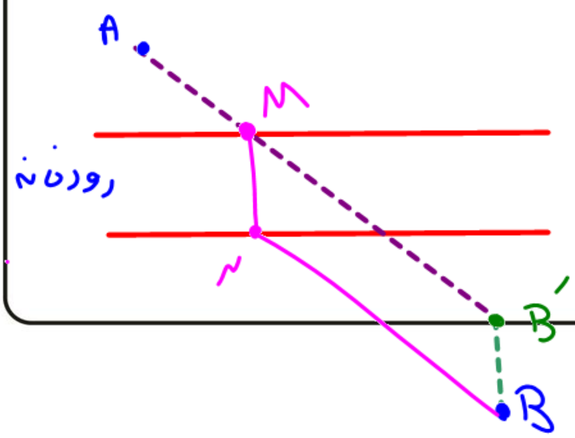


$$A'K'B \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} 8^2+6^2 = A'B^2$$

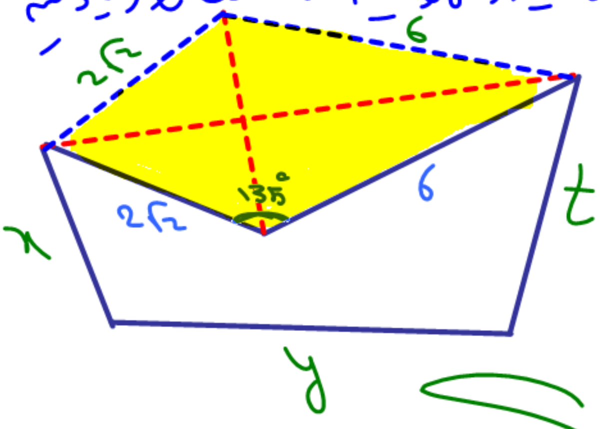
$$A'B = 10$$

* به اندازه ی عرض رودخانه B را انتقال داده تا B' برسیم، نقطه ی برخورد AB' با خط رودخانه محل احداث پل است.

$AM+MN+NB$



* زمین شکل زیر را در نظر بگیرید ، چقدر می‌توانیم مساحت را زیاد کنیم بدون اینکه محیط تغییر کند؟

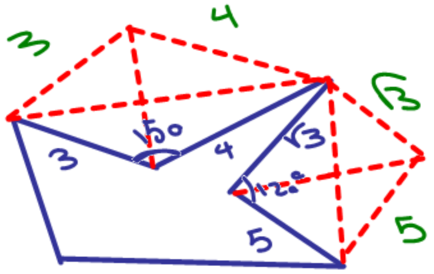


* می‌دانیم به ترتیب طول‌ها است

پس محیط ثابت می‌ماند.

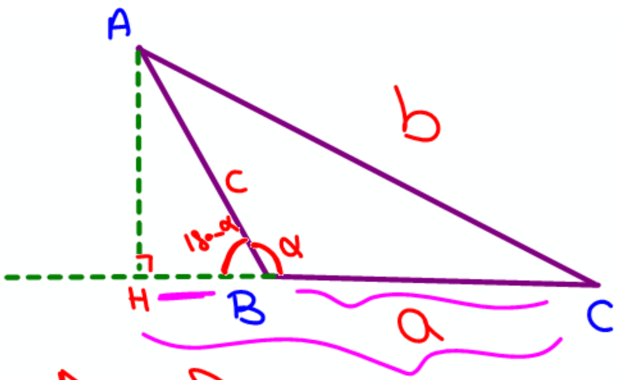
$$S=\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\sqrt2\times 6\times\boxed{\sin 135°}\;\frac{\sqrt2}{\cancel{2}}=12$$

$$\alpha+\beta=180\quad\begin{cases}\sin\alpha=\sin\beta\\ \cos\alpha=-\cos\beta\end{cases}$$



$$S_{\text{افزایش}}=\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times3\times\cancel{4}^{2}\times\boxed{\sin 150°}^{\frac12}+\frac12\times\sqrt3\times5\times\boxed{\sin 120°}^{\frac{\sqrt3}{2}}$$

$$=6+\frac{15}{4}=\frac{39}{4}\;\checkmark$$



$$\overset{\triangle}{AHB}: \sin(180-\alpha)=\frac{AH}{c}=\sin\alpha \Rightarrow AH=c\cdot\sin\alpha$$

$$\cos(180-\alpha)=\frac{HB}{c}=-\cos\alpha \Rightarrow BH=-c\cdot\cos\alpha$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: b^2=c^2\cdot\sin^2\alpha+(a-c\cdot\cos\alpha)^2$$

$$b^2=c^2\sin^2\alpha+a^2-2a\cdot c\cos\alpha+c^2\cos\alpha$$

$$c^2(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})$$

$$\boxed{b^2=c^2+a^2-2a\cdot c\cdot\cos\alpha}$$