سکانس ۱

➤ جایگشت

به حالت‌های قرارگیری n شی متمایز کنار هم جایگشت می‌گویند که تعداد آن‌ها برابر است با: **n!**

$3(\cancel{3}\,2)\times(\cancel{4}\,3)\times 5!\times 3!$

(6) دو حرف و سه عدد کنار هم باشند؟

۲ حرف ۲ — ۳ عدد ۳

مثال ۱: رمزی از سه حرف a, b, c و ۴ عدد ۱.۲.۳.۴ ساخته شده است به چند حالت:

۱) چند رمز ۷ کاراکتری داریم؟ $7!$

۲) چند رمز می‌توان ساخت که ارقام کنار هم باشند؟

۳) چند رمز می‌توان ساخت که حروف کنار هم باشند؟

۴) چند رمز می‌توان ساخت که ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند؟

۵) چند رمز می‌توان ساخت که ارقام یکی در میان باشند؟

(2) 1234 a b c — $4!\times 4!$

(3) abc 1234 — $3!\times 5!$

(4) abc 1234 — $3!\times 4!\times 2!$

(5) 1 2 1 2 1 2 1 — $4!\times 3!$

مثال ۲: خانواده‌ای ۴ فرزند به همراه پدر و مادر می‌خواهند برای گرفتن عکس کنار هم بایستند.

الف) به چند حالت پدر در ابتدا و مادر در انتها قرار می‌گیرند؟

ب) به چند حالت فرزندان در کنار هم هستند؟

ج) به چند حالت فرزندان کنار هم و به ترتیب سن قرار می‌گیرند؟

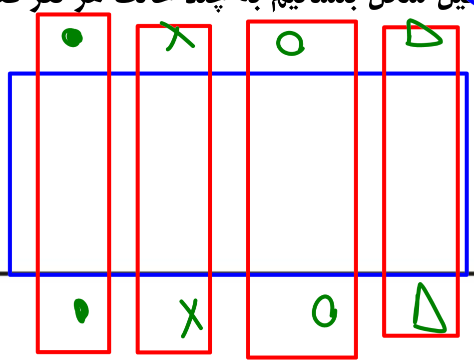
1 P — — — — 1 M — $4!$

(ب) x x x x P M — $4!\times 3!$

(ج) 1234 / 4321 P M — $2\times 3!$

مثال ۳: ۸ نفر که دو به دو با هم برادرند می‌خواهیم دور یک میز مستطیل شکل بنشانیم به چند حالت هر نفر فقط رو به روی برادرش می‌نشینند؟

$4!\times 2^4$



مثال ۴ : با حروف کلمه‌ی «جمهوری» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت که با حرف ج شروع و به حرف ی ختم شود؟

ج $\overset{1}{\_}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{4!}\ \overset{1}{\_}$ ی

مثال ۵ : ۴ کتاب متمایز ریاضی، ۳ کتاب متمایز فیزیک، ۲ کتاب متمایز زیست را می‌خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم به چند حالت:

۱) هیچ شرطی نداشته باشیم؟ $9!$

۲) کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند؟

۳) کتاب‌ها به ترتیب ریاضی، فیزیک، زیست باشند؟

۴) کتاب‌های ریاضی و زیست کنار هم باشند؟

۵) دو کتاب خاص فیزیک و سه کتاب خاص ریاضی کنار هم باشند؟

(۲) ۴ ریاضی، ۳ فیزیک، ۲ زیست: $4! \times 3! \times 2! \times 3!$

(۳) ۴ ریاضی، ۳ فیزیک، ۲ زیست: $4! \times 3! \times 2!$

(۴) ۴ ریاضی ۲ زیست، $f_1\ f_2\ f_3$: $6! \times 4!$

(۵) $R_1 R_2 R_3$، f_1, f_2

$R_1R_2R_3\ f_1 f_2$ ، $z_1\ z_2\ R_4\ f_3$: $5! \times 5!$

10

(۶) دو کتاب فیزیک و سه کتاب ریاضی کنار هم باشند؟

$3\binom{3}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! \times 5! = 30 \times (5!)^2$

با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت که ۳ عدد فرد و ۲ عدد زوج داشته باشیم؟

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \Rightarrow \binom{5}{3} \times \binom{4}{2} \times 5! = 7200$

◄ جایگشت با تکرار

37852

28573

تاب $\longrightarrow 4!$

$\text{DAMDARAN} \Rightarrow \dfrac{8!}{2! \times 3!}$

(D) (A)

مثال ۶: در هر یک از کلمات زیر جایگشت حروف آن‌ها را بیابید؟

۱) بادبادک

۲) ایرانیان

۳) انقلابیون

۴) DAMDARAN

۵) می سی سی پی

۶) ARRANGE

۷) جیرجیرک

$$① \ \frac{7!}{\underset{ب}{2!}\times\underset{د}{2!}\times\underset{ا}{2!}}$$

$$② \ \frac{8!}{\underset{ا}{3!}\times\underset{ی}{2!}\times\underset{ن}{2!}}$$

$$③ \ \frac{9!}{\underset{ا}{2!}\times 2!}$$

$$⑤ \ \frac{8!}{\underset{ی}{4!}\times\underset{س}{2!}}$$

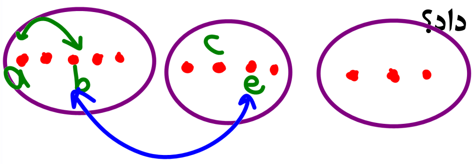
$$⑥ \ \frac{7!}{\underset{R}{2!}\times\underset{A}{2!}}$$

$$\frac{7!}{\underset{ج}{2!}\times\underset{ی}{2!}\times\underset{ر}{2!}}$$

مثال ۷: با ارقم ۱,۱,۲,۲,۳,۳,۵,۴,۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان ساخت؟

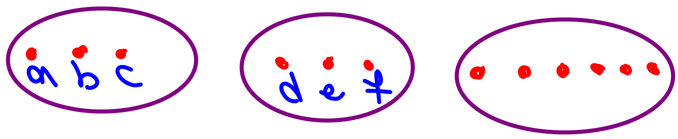
$$\frac{9!}{\underset{1ها}{2!}\times\underset{2ها}{2!}\times\underset{3ها}{2!}\times\underset{5ها}{2!}}$$

مثال ۸: به چند حالت می‌توان ۱۲ نفر را در سه اتاق سه، چهار، پنج نفره جای داد؟



$$\Rightarrow \frac{12!}{5!\times 4!\times 3!}$$

مثال ۹: به چند حالت می‌توان ۱۲ نفر را در دو اتاق سه نفره و یک اتاق ۶ نفره جای داد؟



$$\Rightarrow \frac{12!}{3!\times 3!\times 6!\times 2!}$$

مثال ۱۰: می‌خواهیم روی تعدادی جعبه، کدگذاری کنیم آن‌ها را با حروف a,b,c,d,a,b,d,d انجام می‌دهیم ما حداکثر چند جعبه می‌توانیم کذگذاری کنیم؟

$$\frac{8!}{2!\times 2!\times 3!}$$

مثال ۱۱ : اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{5,6,7,8,9\}$ چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت که از هر مجموعه سه رقم به کار رفته باشد؟

$$\cancel{4\binom{4}{3}} \times \cancel{\binom{5}{3}} \times \cancel{6!} = 40 \times 720 \ldots$$

10   720

مثال ۱۲ : با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد پنج رقمی می‌توان ساخت که دو رقم فرد و سه رقم زوج باشد؟

مثال ۱۳ : با ارقام ۲,۲,۴,۴,۳,۳,۱,۷ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

مثال ۱۴ : با ارقام ۰,۰,۰,۱,۱,۱,۲,۲ چند عدد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

مثال ۱۵ : با حروف کلمه‌ی «عباس آباد» چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت که با $\boxed{«ع»}$ شروع و به $\boxed{«د»}$ ختم شود؟

$\frac{1}{ع}$ — — — — — — $\frac{1}{د}$

ا ب ا س ا ب

$$\frac{6! \quad 720}{\cancel{6}\ 3! \times 2!} = 60$$

$\binom{n}{1}=n$ $\binom{n}{n}=1$ $\binom{n}{n-1}=n$ $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیال با ضرایب واحد:

$\{0,1,2,3,\dots\}$

$x_1+x_2+x_3=10 \Rightarrow \binom{12}{2}=\frac{12\times11}{2}=66$

$K=$ تعداد متغیرها

$n=$ عدد معلوم $\Rightarrow \binom{n+K-1}{K-1}$

$\binom{\text{جمع + تعداد جداوله}}{\text{تعداد جداوله}}$

مثال ۱۶: ۱۵ جایزه یکسان را می‌خواهیم بین پنج نفر تقسیم کنیم به چند حالت:

۱) هیچ شرطی نداشته باشیم؟

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15 \Rightarrow \binom{19}{4}=\frac{19\times18\times17\times16}{4\times3\times2\times1}$

۲) به نفر سوم ۲ جایزه برسد؟

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ $x_3=2$

$x_1+x_2+x_4+x_5=13 \Rightarrow \binom{15}{3}=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}$

۳) به نفر دوم هیچی و به نفر چهارم سه تا برسد؟

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ $x_2=0, x_4=3$

$x_1+x_3+x_5=12 \to \binom{14}{2}=\frac{14\times13}{2}=91$

۴) به نفر پنجم حداقل دو تا و به نفر چهارم سه تا برسد؟

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ $x_5\geq2, x_4=3$

$x_1+x_2+x_3+x_5=10 \Rightarrow \binom{13}{3}=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$

۵) به نفر اول حداقل ۳ تا و به نفر پنجم بیش از ۴ تا برسد؟

بیش از ۴ ← حداقل ۵ بزار

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ $x_1\geq3, x_5\geq5$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \Rightarrow \binom{11}{4}$

۶) به یک نفر هیچی نرسد؟

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$

$\binom{5}{1}=5$ $x_2=0 \to x_1+x_3+x_4+x_5=15 \Rightarrow \binom{18}{3}$ $\Rightarrow 5\times\binom{18}{3}$

۷) به هر یک حداقل یکی برسد؟

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ $x_1\geq1, x_2\geq1, x_3\geq1, x_4\geq1, x_5\geq1$

$x'_1+x'_2+x'_3+x'_4+x'_5=10 \Rightarrow \binom{14}{4}$

مجاز: $\{1,2,3,\dots\}$ $\Rightarrow \binom{n-1}{K-1} \Rightarrow \binom{14}{4}$

جواب طبیعی

مثال ۱۷: تعداد جواب‌های هر یک از معادلات زیر را در شرایط خواسته شده بیابید؟

۱) $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ $x_i\geq0;\ 1\leq i\leq4$

جواب صحیح $\to n$ $i=1,2,3,4$ $\Rightarrow \binom{10}{3}$

۲) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ $x_i>0;\ 1\leq i\leq5$

$x_i\geq1$ ← مجاز ← جواب طبیعی

$\binom{9}{4}$

۳) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=15 \quad x_i\geq 1;\ 1\leq i\leq 3$

$x_1\geq 1$ و $x_2\geq 1$ و $x_3\geq 1$

$x'_1+x'_2+x'_3+x_4+x_5+x_6=12 \Rightarrow \binom{17}{5}$

۴) $x_1+x_2+x_3+x_4=9 \quad x_1>4;\ x_2=1$

$x_1\geq 5$

$x_1+x_3+x_4=3 \rightarrow \binom{5}{2}$

۵) $x_1+x_2+x_3+3x_4=8 \quad x_i\geq 0;\ 1\leq i\leq 4$

۶) $x_1+x_2^2+x_3=10 \quad x_i\geq 1$

۷) $x_1+x_2+\sqrt{x_3}+x_4=4 \quad x_i\geq 0$

* نکته: اگر یک بلایی داشت سر یکی از متغیرها را مرتبه بیاریم جای آن متغیر از خود مال عدد کسر ارائه کنیم تا اینکه آن طرف تساوی منفی نشود!

۸) $x_1+x_2+x_3+\frac{x_4}{3}=5 \quad x_i\geq 1;\ 1\leq i\leq 4$

طبیعی

۹) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10 \quad x_i>0;\ 2\leq i\leq 5$

$x_i\geq 1$

$x_1+x'_2+x'_3+x'_4+x'_5=6 \rightarrow \binom{10}{4}$

۱۰) $x_1+x_2+2\sqrt{x_3}+x_4=5$

$\Rightarrow x_3=0 \rightarrow x_1+x_2+x_4=5 \rightarrow \binom{7}{2}=21$

$x_3=1 \rightarrow x_1+x_2+x_4=3 \rightarrow \binom{5}{2}=10$

$x_3=4 \rightarrow x_1+x_2+x_4=1 \rightarrow \binom{3}{2}=3$

$x_3=9$

$\rightarrow 34$

مثال ۱۸: به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کرد به طوری که به هر یک حداقل یک توپ برسد؟

جواب طبیعی $\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=8$

$\binom{7}{3}=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$

مثال ۱۹ : به چند طریق می‌توان از بین مدادهایی با رنگ‌های زرد، آبی، قرمز، سبز، ۱۱ مداد انتخاب کرد اگر بخواهیم از مداد زرد حداقل دو تا و از مداد سبز بیش از سه تا داشته باشیم؟

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$

$x_1 \geq 2$, $x_4 > 3$, $x_4 \geq 4$

$\Rightarrow x'_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 5 \rightarrow \binom{8}{3}$

مثال ۲۰ : ثابت کنید جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است؟

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ $\quad x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, \dots, x_k \geq 1$

$x'_1 + x'_2 + x'_3 + \dots + x'_k = n - k$

$\Rightarrow \binom{n - \cancel{k} + \cancel{k} - 1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

مثال ۲۲ : ۲۰ توپ یکسان داریم می‌خواهیم بین سه نفر تقسیم کنیم به چند حالت نفر دوم از نفر اول توپ بیشتری می‌گیرد؟

$x_1 + x_2 + x_3 = 20 \Rightarrow x_2 > x_1$

کل $- (x_1 = x_2) = 220$

$\binom{22}{2} = \frac{22 \times 21}{2} = 231$

$x_1 = x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

۱۱ حالت داریم که همه برابرند

پس ۲۲۰ حالت می‌ماند.

$x_1 > x_2$

$x_2 > x_1 \rightarrow 110$

سکانس

مربع لاتین

$n \times n$

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

4×4

13	31	22
22	13	31
31	22	13

32	11	23
21	33	12
13	22	31

B و D با هم متعامدند.

نکته: تعداد مربع‌های لاتین مرتبه ۳، ۱۲ تا است.

۳	2	1
1	۳	2
2	1	۳

B

۳	1	2
2	۳	1
1	2	۳

۲		
	۲	
		۲

۲		
	۲	
		۲

A

۱	3	2
2	۱	3
3	2	۱

۱	2	3
3	۱	2
2	3	۱

		۳
	۳	
۳		

2	1	۳
1	۳	2
۳	2	1

D

1	3	۲
	۲	
۲		

3	1	۲
1	۲	3
۲	3	1

C

		۱
	۱	
۱		

		۱
	۱	
۱		

۱۲ تا مربع لاتین مرتبه 3 داریم که تمامی آن قطر اصلی برابر و تمامی آن قطر فرعی برابر دارند هرکدام از هم گروهی ۵ با هم متعامد نیستند اما هر ۳ تا از گروه اول با هرکدام از گروه دوم متعامدند.

مربع‌های لاتین متعامد

اگر دو مربع لاتین هم مرتبه را با هم ترکیب کنیم و خانه‌های تکراری ندهند آن دو مربع را متعامد می‌گوییم.

نکته: برای $n=1,2,6$ دو مربع مرتبه n متعامد نداریم.

مثال ۲۳ : یک مربع چرخش مرتبه n رسم کنید و با جایگشت $\begin{pmatrix} ۱\to۲ \\ ۲\to۴ \\ ۴\to۳ \\ ۳\to۱ \end{pmatrix}$ مربع جدیدی بسازید و مشخص کنید این دو مربع متعامدند یا خیر؟

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

2	4	1	3
3	2	4	1
1	3	2	4
4	1	3	2

مثال ۲۴ : سه برادر می‌خواهند در سه روز هفته، سه نوع پیراهن بپوشند برای این منظور برنامه‌ریزی کنید؟

	B_1	B_2	B_3
شنبه	1	2	3
یکشنبه	2	1	2
دوشنبه	3	3	1

مثال ۲۵ : سه برادر می‌خواهند در سه روز هفته، ۲ نوع سه نوع پیراهن و سه نوع شلوار بپوشند برای این منظور برنامه ریزی کنید؟

	B_1	B_2	B_3
شنبه	2	1	3
یکشنبه	1	2	1
دوشنبه	3	3	2

پیراهن

	B_1	B_2	B_3
شنبه	2	1	3
یکشنبه	1	3	2
دوشنبه	3	2	1

شلوار

مثال ۲۷ : پنج برادر می‌خواهند در پنج روز هفته، پنج نوع شلوار و پنج نوع پیراهن بپوشند برای این منظور برنامه ریزی کنید.

شلوار

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
1	2	3	4	5	شنبه
5	1	2	3	4	یک
4	5	1	2	3	دو
3	4	5	1	2	~
2	3	4	5	1	جمعه

پیراهن

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
5	4	3	2	1
4	3	2	1	5
3	2	1	5	4
2	1	5	4	3
1	5	4	3	2

اصول شمول و عدم شمول

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

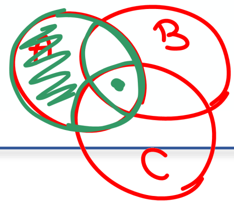
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

$|A-B|=|A|-|A\cap B|$

$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|U|-|A\cup B|$

$|A\cup B\cup C|=\underbrace{|A|+|B|+|C|}_{\text{جمع سه‌تاشون}}-\underbrace{|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|}_{\text{اشتراک دو به دوشون}}+\underbrace{|A\cap B\cap C|}_{\text{اشتراک سه‌تاشون}}$

$|A-(B\cup C)|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$ فقط



$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|U|-|A\cup B\cup C|$

B نه و A نه

مثال ۲۸ : در بین اعداد $1\leq n\leq 400$ چند عدد وجود دارد که به هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشد؟

نه مضرب ۴ ، نه مضرب 6

$|\bar{4}\cap\bar{6}|=|U|-|4\cup 6|=400-(|4|+|6|-|4\cap 6|)$ $\quad 400-133$

$\cancel{480}$

$=400-\left(\left[\frac{400}{4}\right]^{100}+\left[\frac{400}{6}\right]^{66}-\left[\frac{400}{12}\right]^{33}\right)=267$ ✓

نکته: $\left[\frac{n}{k}\right]$ ← تعداد اعدادی بین ۱ تا n که بر k بخش پذیر است

$|\bar{5}\cap\bar{3}\cap\bar{7}|=|U|-|5\cup 3\cup 7|$

$=|U|-(|5|+|3|+|7|-|5\cap 3|-|5\cap 7|-|3\cap 7|+|3\cap 5\cap 7|)$

$=900-\left(\left[\frac{900}{5}\right]^{180}+\left[\frac{900}{3}\right]^{300}+\left[\frac{900}{7}\right]^{128}-\left[\frac{900}{15}\right]^{60}-\left[\frac{900}{35}\right]^{25}-\left[\frac{900}{21}\right]^{42}+\left[\frac{900}{105}\right]^{8}\right)$

100 200
20

مثال ۳۰ : چند عدد سه رقمی داریم که نسبت به ۱۰۵ اول است؟

← یعنی عامل های 105 را نداشته باشد ؟

$105=5\times 3\times 7$

$(111,105)=3$

مثال ۳۱ : چند عدد سه رقمی داریم که ارقام ۳، ۵، ۷ حداقل یک بار در آن به کار رفته باشند؟

حداقل یکی از $3, 5, 7 = |U| - |\bar{3} \cap \bar{5} \cap \bar{7}|$

$= 900 - 6 \times 7^2$ ✓

~~457~~

نداشتن $7, 5, 3$: $\underline{6} \times \underline{7} \times \underline{7}$

مثال ۳۲ : چند عدد سه رقمی داریم که حداقل یک ۵ و حداقل یک ۷ و حداقل یک رقم ۳ در آن به کار رفته باشد؟

حداقل یک رقم ۵ و حداقل یک رقم ۷
حداقل یک رقم ۳

$= U' - |\bar{3} \cup \bar{5} \cup \bar{7}| =$

$= U' - (|\bar{3}| + |\bar{5}| + |\bar{7}| - |\bar{3} \cap \bar{5}| - |\bar{3} \cap \bar{7}| - |\bar{5} \cap \bar{7}| + |\bar{3} \cap \bar{5} \cap \bar{7}|)$

$= 900 - (3 \times 8 \times 9^2 - 7 \times 8^2 \times 3 + 6 \times 7^2)$

کل $\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}$

بدون 3 $\underline{8}\ \underline{9}\ \underline{9}$

بدون دو $\underline{7}\ \underline{8}\ \underline{8}$

مثال ۳۳ : در یک کلاس ۳۴ نفره ۱۵ نفر در درس ریاضی و ۱۱ نفر در درس فیزیک و ۹ نفر در درس شیمی قبول شده‌اند، اگر بدانیم ۵ نفر در هر سه درس افتاده‌اند. و ۵ نفر ریاضی و فیزیک، ۶ نفر فیزیک و شیمی و ۳ نفر ریاضی و شیمی قبول شده باشند چند نفر:

$|U| = 34$ ، $|A| = 15$ ، $|B| = 11$ ، $|C| = 9$ ، $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 5$

$|A \cap B| = 5$ ، $|B \cap C| = 6$ ، $|A \cap C| = 3$

۱) هر سه درس را قبول شده‌اند؟

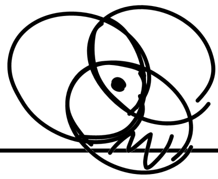
۲) فقط یکی از درس‌ها را قبول شده‌اند؟

① $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - |A \cup B \cup C|$

$5 = 34 - \boxed{29}$

$29 = 15 + \cancel{11} + 9 - \cancel{5} - \cancel{6} - 3 + |A \cap B \cap C|$

$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = 8$



فقط یکی : فقط ریاضی یا فقط فیزیک یا فقط شیمی

$|A - (B \cup C)| + |B - (A \cup C)| + |C - (B \cup A)|$

$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| + |B| - |B \cap A| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$15 - \cancel{5} - \cancel{3} + \cancel{8} + \cancel{11} - \cancel{5} - \cancel{6} + 8 + \cancel{9} - \cancel{3} - \cancel{6} + 8 = 31$ ✓

مقدار توابع : برد^دامنه

تعداد توابع یک به یک : $\frac{\text{برد}!}{(\text{برد} - \text{دامنه})!}$

تعداد توابع پوشا : ۳^دامنه − ۳ × ۲^دامنه + ۳

$\frac{5!}{(5-4)!} = 120$ ، $3^4 = 81$

مثال ۳۵ : ۶ خودکار مختلف را به چند طریق می‌توان بین سه نفر تقسیم کرد؟

$3^6 = 729$

$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \to \binom{8}{2}$

اشیاء مختلف ← ترتیب نداشته باشیم ← تابع نوشتن (عدد بیشتر دامنه)

مثال ۳۶ : ۶ خودکار مختلف را به چند طریق می‌توان بین سه نفر تقسیم کرد به طوری که به هر یک حداکثر یک خودکار برسد؟

مختلف ← حداکثر یکی ← تابع یک به یک ← (اون که بیشتره برد است)

$$\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

مثال ۳۷ : ۶ خودکار مختلف را به چند طریق می‌توان بین سه نفر تقسیم کرد به طوری که به هر یک حداقل یک خودکار برسد؟

مختلف / حداقل یکی ← تابع پوشا (با روش‌ها)

$$|U| - |\bar{a} \cup \bar{b} \cup \bar{c}|$$
$$= |U| - (|\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}| - |\bar{a}\cap\bar{b}| - |\bar{a}\cap\bar{c}| - |\bar{b}\cap\bar{c}| + |\bar{a}\cap\bar{b}\cap\bar{c}|)$$
$$= 3^6 - (2^6 + 2^6 + 2^6 - \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{1} + 0) = 540$$

$3^{\text{دامنه}} - 3 \times 2^{\text{دامنه}} + 3 = 3^6 - 3 \times 2^6 + 3$

مثال ۳۸ : چند تابع یک به یک از $A=\{1,2,3,4,5\}$ به $B=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6\}$ می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب $(1,-1)$ باشد؟

دامنه = 4 ، برد = 5

$$\frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

مثال ۴۰ : به چند صورت می‌توان ۵ فیلم سینمایی را بین سه داور تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

$$\boxed{3^5 - 3\times 2^5 + 3} = 150 \leftarrow$$ تابع پوشا

اصل لانه کبوتری

حداقل تعداد کبوتر در یک لانه $= \left[\dfrac{\text{کبوتر} - 1}{\text{لانه}}\right] + 1$

* اگر تعداد کبوترها یا تعداد لانه‌ها مجهول بود فرمول را بدون براکت حل کن!

مثال ۴۱ : ۷۸ نفر در یک کلاس حضور دارند، حداقل چند نفر ماه تولد یکسانی دارند؟

کبوتر = 78

لانه = 12

حداقل افرادی که ماه تولد یکسانی دارند $= \left[\dfrac{78-1}{12}\right] + 1 = 7$

مثال ۴۲ : در یک ورزشگاه حداقل چند تماشاگر داشته باشیم تا مطمئن شویم بیش از ۳ نفر از آن‌ها در یک روز هفته و در یک ماه از سال متولد شده‌اند؟

x = کبوتر

حداقل ۴

لانه $= 7 \times 12 = 84$

$4 = \dfrac{x-1}{84} + 1 \Rightarrow x-1 = 232 \Rightarrow \boxed{x = 233}$

مثال ۴۳ : در بین ۷۰ عدد طبیعی، حداقل چند عدد داریم که در تقسیم بر ۱۶ هم باقی‌مانده‌اند؟

$r=0$ $r=1$ $r=2$ ---- $r=15$

لانه $=16$

کبوتر $=70$

حداقل اعداد هم باقیمانده $=\left[\frac{70-1}{16}\right]+1=5$

مثال ۴۴ : ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموع آن‌ها زوج است؟

زوج و زوج و زوج

زوج و فرد و فرد

فرد و زوج و زوج

فرد و فرد و فرد

مثال ۴۵ : حداقل چند دانش آموز در حیاط مدرسه داشته باشیم، تا مطمئن شویم حداقل ۲۱ نفر از آن‌ها متعلق به یک پایه تحصیلی (دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشته تحصیلی (ریاضی، تجربی، انسانی) هستند؟

لانه $=3\times3=9$

کبوتر $=?$

$$21=\frac{x-1}{9}+1 \Rightarrow x-1=180 \rightarrow x=181$$

طبق اصل لانه کبوتری برای آنکه حداقل ۲۱ نفر رشته تحصیلی و پایه یکسان داشته باشند نیازمند حداقل 181 دانش آموزیم.

مثال ۴۶ : مجموعه‌ی اعداد $A=\{1,2,3,...,84\}$ را در نظر می‌گیریم، نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان ۸۵ باشد؟

2 , 83

$\{(1,84)(2,83)(3,82)(4,81)\ ......\ (42,43)\}$

$\{1,2,3,4,.....,42,\bigcirc\}$

* طبق اصل لانه کبوتری برای آنکه مطمئن شویم حداقل 2 عضو داریم که جمعشان 85= است نیازمند حداقل 42+1 عضو هستیم.

مثال ۴۷ : از مجموعه‌ی $\{1,5,9,13,...,77,81,85\}$ حداقل چند عضو انتخاب کنیم تا مطمئن شویم در بین آن‌ها حداقل دو عضو داریم که مجموعشان ۹۰ باشد؟

$\{1,(5,85)(9,81)(13,77)(17,73)(21,69)(25,65)(29,61)(33,57)(37,53)(41,49),45\}$

$\{1,5,9,13,17,21,....,45,\bigcirc\}$

تعداد: $\frac{\text{آخری}-\text{اولی}}{\text{قدر نسبت}}+1$

$\frac{45-1}{4}+1$

طبق اصل لانه کبوتری برای آنکه مطمئن شویم حداقل دو عضو داریم مجموعشان 90 است نیازمند حداقل 12+1 عضو هستیم!

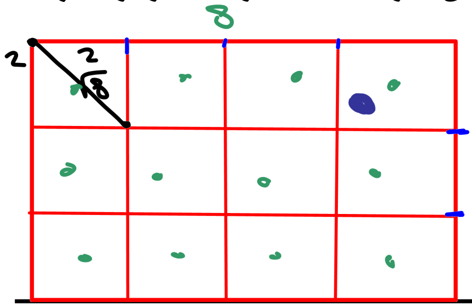
* ۵ کتاب ریاضی و ۳ کتاب شیمی و دو کتاب زیست داریم، حداقل چند کتاب انتخاب کنیم تا مطمئن شویم پس لاقل ها حداقل یک کتاب زیست داریم؟

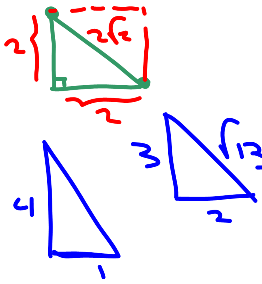
۵ کتاب ریاضی
۳ شیمی
۲ زیست

5 کتاب ریاضی + 3 شیمی + 1
و تا
2 زیست

طبق اصل لانه کبوتری برای آنکه مطمئن شویم حداقل یک کتاب زیست داریم، نیاز مند حداقل 8+1 کتابیم!

مثال ۴۹ : درون یک مستطیل ۸ در ۶ حداقل چند نقطه انتخاب کنید تا مطمئن شوید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از $2\sqrt{2}$ است؟



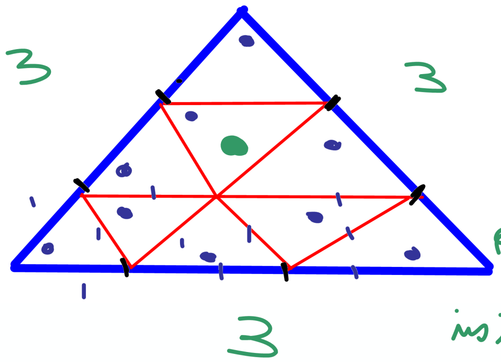


$\sqrt{8} = \sqrt{2^2+2^2}$

$\sqrt{13} = \sqrt{3^2+2^2}$

$\sqrt{17} = \sqrt{4^2+1^2}$

مثال ۵۰ : درون یک مثلث به طول ضلع ۳ حداقل چند نقطه انتخاب کنیم تا مطمئن شویم فاصله‌ی این دو نقطه کمتر از ۱ است؟



چون می‌خواهیم فاصله‌ی دو نقطه کمتر از 1 شود پس نیاز مند مثلث‌هایی به طول ضلع 1 هستیم

طبق اصل لانه کبوتری، برای آنکه مطمئن شویم فاصله‌ی حداقل دو نقطه کمتر از 1 است، نیاز مند حداقل 9+1 نقطه‌ایم!

بین اعداد 1 تا 20، حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل دو عدد داریم که نسبت به هم اول نیستند؟

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

$\{1,2,3,5,7,11,13,17,19,20\}$

طبق اصل لانه کبوتری برای آنکه مطمئن شویم حداقل دو عدد داریم که نسبت به هم اول نیستند نیاز مند حداقل 9+1 عددیم!

مثال ۵۲ : در بین زوج مرتب‌هایی با اعداد طبیعی، حداقل چند نقطه انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل دو زوج مرتب در بین آن‌ها مجموع مولفه‌های اول و مجموع مولفه‌های دوم زوج هستند؟

* مختصات وسط آن‌ها عدد طبیعی است

(زوج و زوج)

(زوج و فرد)

(فرد و زوج)

(فرد و فرد)

(زوج و فرد)

(3 و 5)

(فرد و فرد)

(4 , 5)

(10 , 5)

زوج و زوج