

ردیف	نمره	
۱		فرض کنید a, b, c اعداد صحیح مخالف صفر باشند، ثابت کنید اگر $a^2 \mid bc$ ، $b \mid a$ ، آنگاه داریم: $ab \mid c^2$
۲		اگر $ab \mid b + c$ گزاره‌های زیر را نتیجه بگیرید: الف) $b \mid c$ ب) $a \mid b^2 - c^2$ ج) $a \mid b^3 + c^3$
۳		باقیماندهٔ یک عدد مکعب کامل در تقسیم بر ۷ چه مقداری می‌تواند بسازد؟
۴		صورت کلی جواب‌های معادلهٔ هم‌نهشتی $73x \equiv 1$ را بیابید:
۵		ثابت کنید: اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid -b$ و $a \mid b$ و $-a \mid -b$.
۶		اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.
۷		ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.
۸		عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟
۹		درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
		الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $k + 1$ مربع کامل است.
		ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.
۱۰		باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به‌دست آورید.
۱۱		جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید.
		الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a \mid b$ ، آنگاه عدد شمارندهٔ عدد است.
		ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است.
۱۲		اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به‌دست آورید.
۱۳		اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به‌دست آورید.
۱۴		باقی‌ماندهٔ تقسیم $19 + 38^{36}$ بر ۴ به‌دست آورید.
۱۵		a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

ردیف	نمره	
۱۶		باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ است، باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)
۱۷		اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت ثابت کنید: $ a \leq b $.
۱۸	۱.۲۵	اگر α و β دو عدد گنگ بوده ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد به روش برهان خلف ثابت کنید $2\alpha + \beta$ گنگ است.
۱۹	۱.۲۵	ثابت کنید اگر $a \equiv b$ ، $a \equiv c$ ، $b \equiv c$ آنگاه $a \equiv c$.
۲۰	۱	به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.
۲۱	۱	اگر $2n + 1 \mid 5$ ، ثابت کنید $14n^2 + 19n + 6 \mid 25$.
۲۲	۰.۷۵	جملات زیر را با نوشتن عدد مناسب در جای خالی تکمیل کنید.
		(الف) اگر a, b دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک باشند و $27 \mid b$ ، $9a \mid b$ آنگاه $a = \dots\dots\dots$ است.
۲۳	۱.۲۵	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد $3 + 2a$ بر ۸ را به دست آورید.
۲۴	۱	اگر $a \equiv b$ و $m \mid n$ ثابت کنید: $a \equiv b$.
۲۵	۱.۲۵	اگر a عدد صحیح بزرگ تر از یک و $5 \mid 11k + 5$ و $3 \mid 7k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است؟

ردیف	نمره
۱	$(1) \left. \begin{matrix} a^2 bc \\ b a \end{matrix} \right\} \rightarrow a^2 b bca \rightarrow a c$ $(2) \left. \begin{matrix} b a \rightarrow b^2 a^2 \\ a^2 bc \end{matrix} \right\} \rightarrow b^2 a^2 a^2 bc \rightarrow b c$ $\xrightarrow{(1), (2)} ab c^2$
۲	الف) $\frac{ab b+c}{b ab} \rightarrow \frac{b b+c}{b b} \rightarrow b c$ ب) $\frac{ab b+c}{a ab} \rightarrow a b+c \rightarrow a (b+c)(b-c) \rightarrow a b^2 - c^2$ ج) $\frac{a b+c}{b+c b^3 + c^3} \rightarrow a b^3 + c^3$
۳	هر عدد صحیح دلخواه a در تقسیم بر ۷ به یکی از ۷ حالت $7k$، $7k \pm 1$، $7k \pm 2$، $7k \pm 3$ است. باید هریک از حالت های فوق عدد a را به توان ۳ برسانیم تا باقیمانده های ممکن a^3 تقسیم بر ۷ بیابیم: $a = 7k \rightarrow a^3 = 7k^3$ $a = 7k \pm 1 \rightarrow a^3 = 7k^3 \pm 1$ $a = 7k \pm 2 \rightarrow a^3 = 7k^3 \pm 1$ $a = 7k \pm 3 \rightarrow a^3 = 7k^3 \pm 1$ بنابراین باقیمانده تقسیم مکعب هر عدد صحیح بر ۷ فقط می تواند یکی از مقادیر ۰، ۱، ۶ باشد.
۴	می توان نوشت: $7^3 x \equiv 1 \xrightarrow{7^3 \equiv 1} 4x \equiv 1 \equiv 1 + 2^3 \equiv 2^4 \xrightarrow{(4, 2^3)=1} x \equiv 6$ بنابراین داریم: $x = 2^3 k + 6$
۵	$a b \Rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} b = (-a)(-q) \Rightarrow -a b \\ -b = (-a)q = a(-q) \Rightarrow -a -b, a -b \end{cases}$
۶	طبق فرض می توان نوشت: $\left. \begin{matrix} a = 7k + 5 \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 11} 11a = 56k + 40 \\ a = 11k' + 7 \ (k' \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 7} 7a = 56k' + 49 \end{matrix} \right\}$ $\Rightarrow a = 56k - 56k' - 9 \Rightarrow a = 56(k - k') - 9 \Rightarrow a = 56k'' - 9$ $\Rightarrow a = 56(\underbrace{k'' - 1}_q) + 56 - 9 \Rightarrow a = 56q + 47$ بنابراین باقی مانده تقسیم a بر ۵۶ برابر ۴۷ است.
۷	$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = \underbrace{3n(n+1)}_{2k} + 1 = 6k + 1$ حال n می تواند زوج یا فرد باشد. در هر دو صورت حاصل $(n+1)^3 - n^3$ عددی فرد می شود؛ پس حکم برقرار است.
۸	$1398 \equiv 1 + 3 + 9 + 8 \equiv 3$ بنابراین $1398 \in [3]_9$.

ردیف	نمره
۹	
الف	درست $k = n(n+1) \Rightarrow k = n^2 + n \Rightarrow 4k = 4n^2 + 4n \Rightarrow 4k + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow 4k + 1 = (2n+1)^2$
ب	درست فرض کنیم $(a, a+1) = d, a \in \mathbb{Z}$ در نتیجه داریم: $\frac{d a}{d a+1} \longrightarrow d (a+1) - a \longrightarrow d 1 \xrightarrow{d>0} d=1$
۱۰	$7^2 = 49 \equiv 4 \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7^{15} \equiv 4} 7^{30} \equiv 4$
۱۱	
الف	عدد a شمارنده عدد b است.
ب	$2m$
۱۲	$4a - 7 \equiv 3a - 5 \Rightarrow a \equiv 2$ $\Rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \equiv 4$ $\Rightarrow r = 4$
۱۳	$a = 4q + 3 \xrightarrow{\times 2} 2a = 8q + 6$ $\xrightarrow{+3} 2a + 3 = 8q + 9 = 8q' + 1$ باقی مانده = ۱
۱۴	$38 \equiv 2 \Rightarrow 38^{36} \equiv 2^{36} \equiv 0$ $\Rightarrow 2^{36} + 19 \equiv 19 \equiv 3 \Rightarrow \text{باقی مانده} = 3$
۱۵	اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف)، پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند، در نتیجه مجموع آنها باید فرد باشد، اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است، با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.
۱۶	$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \\ \xrightarrow{-} a = 20q' - 1 \rightarrow a = 20q'' + 19 \end{cases}$
۱۷	$a b \Rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = a q $ $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow q \geq 1 \Rightarrow a q \geq a \Rightarrow b \geq a $
۱۸	فرض می کنیم $2\alpha + \beta$ گویا باشد، از آنجایی که می دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست، پس باید عدد $(2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)$ یعنی α گویا باشد که خلاف فرض است. پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است. (صفحه ۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: فرض می کنیم $2\alpha + \beta$ گویا باشد (۲۵/نمره)، از آنجایی که می دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست (۲۵/نمره) پس باید عدد $(2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)$ یعنی α گویا

ردیف	نمره	
۱۹	۱.۲۵	$\left. \begin{array}{l} a \equiv_m b \Rightarrow m a-b \\ b \equiv_m c \Rightarrow m b-c \end{array} \right\} \Rightarrow m (a-b) + (b-c) \Rightarrow m a-c \Rightarrow a \equiv_m c$ (صفحه ۲۰ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $\left. \begin{array}{l} a \equiv_m b \Rightarrow m a-b \text{ (نمره ۲۵)} \\ b \equiv_m c \Rightarrow m b-c \text{ (نمره ۲۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow m (a-b) + (b-c) \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow m a-c \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow a \equiv_m c \text{ (نمره ۲۵)}$
۲۰	۱	روش اول: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ همیشه درست روش دوم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$ همیشه درست جهت فلش‌ها دوطرفه باشد. (صفحه ۷ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: روش اول: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ (نمره ۲۵)} \iff a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \text{ (نمره ۲۵)} \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (نمره ۲۵)}$ همیشه درست روش دوم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab \text{ (نمره ۲۵)} \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0 \text{ (نمره ۲۵)} \iff (a-b)^2 \geq 0 \text{ (نمره ۲۵)}$ همیشه درست جهت فلش‌ها دوطرفه باشد. (نمره ۲۵)
۲۱	۱	$\left. \begin{array}{l} 5 2n+1 \xrightarrow{\text{توان}} 25 4n^2+4n+1 \\ 5 2n+1 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 5} 25 10n+5 \\ 25 10n+5 \xrightarrow{\text{طرف دوم } \times n} 25 10n^2+5n \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 25 14n^2+19n+6$ (صفحه ۱۶ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $\left. \begin{array}{l} 5 2n+1 \xrightarrow{\text{توان}} 25 4n^2+4n+1 \text{ (نمره ۲۵)} \\ 5 2n+1 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 5} 25 10n+5 \text{ (نمره ۲۵)} \\ 25 10n+5 \xrightarrow{\text{طرف دوم } \times n} 25 10n^2+5n \text{ (نمره ۲۵)} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 25 14n^2+19n+6 \text{ (نمره ۲۵)}$
۲۲	۰.۷۵	
		الف $a = 3$
۲۳	۱.۲۵	$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 2(4q + 3) + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$
۲۴	۱	روش اول: $a \equiv_m b, n m \Rightarrow m a-b, n m \Rightarrow n a-b \Rightarrow a \equiv_n b$ روش دوم: $a \equiv_m b, n m \Rightarrow a-b = mq = nq' \Rightarrow a-b = nq'q \Rightarrow a \equiv_n b$ روش سوم:

ردیف	نمره
	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \\ n m \Rightarrow m = nq \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b \Rightarrow nq a - b, n nq \Rightarrow n a - b \Rightarrow a \equiv b$ روش چهارم: برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد، پس a همنهشت b به پیمانه n نیست: $\begin{cases} a - b \neq nq_1 \Rightarrow a - b = nq_1 + r, 0 < r < n & (*) \\ a \equiv b, n m \Rightarrow a - b = nq_2, m = nq_3 \Rightarrow a - b = nq_3q_2 \\ \Rightarrow nq_1 + r = nq_3q_2 \Rightarrow n r & (**) \end{cases}$ رابطه (*) با (**) تناقض دارد، پس حکم برقرار است.
۲۵	روش اول: $a 11k + 5, a 7k + 3 \Rightarrow a 77k + 35, a 77k + 33$ $\Rightarrow a (77k + 35) - (77k + 33)$ $\Rightarrow a 2 \Rightarrow a = 2$ روش دوم: $\begin{cases} 11k + 5 = aq_1 \Rightarrow 77k + 35 = aq_2 \\ 7k + 3 = aq_3 \Rightarrow 77k + 33 = aq_4 \end{cases} \Rightarrow 2 = aq_5 \Rightarrow q_5 = 1, a = 2$

ردیف	نمره
۱	یک گراف کامل دارای ۵۵ یال است. درجه هر رأس را بیابید.
۲	در گراف مقابل، دو مسیر از v_1 به v_4 یکی با کمترین طول و دیگری با بیشترین طول بنویسید.
۳	اگر $m \mid a - b$, $m \mid c - d$ ثابت کنید: $m \mid ac - bd$
۴	به ازای چند عدد صحیح از n رابطه $7n + 5 \mid n + 1$ برقرار است؟
۵	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.
۶	ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.
۷	جواب های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.
۸	اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟
۹	همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.
۱۰	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.
۱۱	جاهای خالی را پر کنید.
	الف) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند: ۱) $a \mid c, b \mid c$ ۲) $\forall m > 0, \dots\dots\dots$
	ب) گراف G را می نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.
۱۲	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
۱۳	معادله هم نهشتی $20 \equiv 8x^{12}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.
۱۴	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.
	ت) تعداد رأس های فرد هر گراف عددی است.

ردیف	نمره	
		(الف) مرتبهٔ گراف، نشان‌دهندهٔ تعداد گراف می‌باشد.
		(ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می‌نامیم.
		(پ) دو یال را می‌نامیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها را به هم متصل کند.
		(ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی است.
۱۵		جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
		(الف) الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد.
		(ب) ب) اگر یک یال گراف، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می‌نامیم.
		(پ) پ) مرتبهٔ گراف، نشان‌دهندهٔ تعداد گراف است.
		(ت) ت) در یک گراف k منتظم ماکزیمم درجه رأس‌ها برابر با است.
۱۶		اگر $a > 1$ ، $a 9k + 4$ ، $a 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.
۱۷		باقی‌ماندهٔ تقسیم $38^{36} + 19$ را بر ۴ به دست آورید.
۱۸		با تبدیل معادله سیالهٔ خطی $5x + 2y = 18$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن جواب‌های عمومی این معادله را بیابد.
۱۹		در جاهای خالی عبارات‌های مناسب بنویسید.
		(الف) حاصل $(m^5, m, [m^2])$ برابر با است.
		(ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ می‌گوییم a و b هستند.
		(پ) تعداد یال‌های گراف k ، برابر است.
۲۰	۱	اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a 7k + 1$ و $a 4k + 3$ ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 17$.
۲۱	۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است. ب) میانگین پنج عدد صحیح، همان عدد وسطی است. پ) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند. ت) اگر $a b$ و $c d$ آنگاه $a + c b + d$

ردیف	نمره	
۲۲	۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید: الف) تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} x = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$ مضرب ۴ است. ب) اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ آنگاه $a \equiv b \pmod{m}$. ج) طرفین رابطهٔ همنهشتی را می‌توان به توان هر عدد طبیعی رساند. د) معادلهٔ همنهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, b) m$.
۲۳	۱.۲۵	معادلهٔ همنهشتی $4x \equiv 1 \pmod{5}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را به دست آورید.
۲۴	۱.۵	اگر a^2 عدد صحیح فرد بوده و $4 + 3b a$ ، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + 2b^2 - 1$ بر ۸ به دست آورید.
۲۵	۱	فرض کنید a یک عدد صحیح است. ثابت کنید $a - 3a^3$.

ردیف	نمره
۱	$q = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 55 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p(p-1) = 110 = 11 \times 10 \Rightarrow p = 11$ گراف کامل مرتبه ۱۱ است، پس $(11-1) = 10$ منتظم است. یعنی درجه هر رأس ۱۰ است.
۲	مسیر به طول ۲ v_1, v_5, v_4 مسیر به طول ۵ $v_1, v_6, v_5, v_2, v_3, v_4$
۳	$\left. \begin{array}{l} m \mid a-b \Rightarrow m \mid c(a-b) \\ m \mid c-d \Rightarrow m \mid b(c-d) \end{array} \right\} \Rightarrow m \mid (ac-bc) + (bc-bd) \Rightarrow m \mid ac-bd$
۴	$\left. \begin{array}{l} n+1 \mid 7n+5 \\ n+1 \mid 7(n+1) \end{array} \right\} \Rightarrow n+1 \mid (7n+7) - (7n+5) \Rightarrow n+1 \mid 2$ $\left\{ \begin{array}{l} 1) \ n+1=2 \rightarrow n=1 \\ 2) \ n+1=-2 \rightarrow n=-3 \\ 3) \ n+1=1 \rightarrow n=0 \\ 4) \ n+1=-1 \rightarrow n=-2 \end{array} \right.$
۵	طبق فرض می توان نوشت: $\left. \begin{array}{l} a = 7k + 5 \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 4} 4a = 28k + 20 \\ a = 11k' + 7 \ (k' \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 5} 5a = 55k' + 35 \end{array} \right\}$ $\Rightarrow a = 28k - 28k' - 9 \Rightarrow a = 28(k-k') - 9 \Rightarrow a = 28k'' - 9$ $\Rightarrow a = 28(\underbrace{k''}_{q} - 1) + 28 - 9 \Rightarrow a = 28q + 19$ بنابراین باقی مانده تقسیم a بر ۲۸ برابر ۱۹ است.
۶	می توان نوشت: $11 + 12 = 23$ بنابراین $(11^{51} + 12^{51}) - (11^{51} + 12^{51}) = (11 + 12)^{51} - 11^{51} - 12^{51} = 23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$ با توجه به رابطه $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$ داریم: $23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \equiv (11+12)^{51} - 11^{51} - 12^{51} \pmod{11 \times 12}$
۷	$7x + 5y = 11 \Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 11 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 7x \equiv 1 \pmod{5} \xrightarrow{(7,5)=1} x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$ $7(5k + 3) + 5y = 11 \Rightarrow 5y = 11 - 7 \times 5k - 21 \Rightarrow 5y = -10 - 7 \times 5k \Rightarrow y = -2 - 7k$ بنابراین تمام جواب های معادله سیاله $7x + 5y = 11$ به صورت زیر هستند: $\left\{ \begin{array}{l} x = 5k + 3 \\ y = -2 - 7k \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$
۸	روزهای هفته دوره گردش هفت روزه دارند بنابراین اگر $a \equiv b \pmod{7}$ آن گاه a و b -امین روز سال یکسان هستند اگر اول مهر x-امین و ۷ اسفند y-امین روز سال باشند داریم: $x = 6 \times 31 + 1 \equiv 5 \pmod{7}$ $y = 6 \times 31 + 5 \times 30 + 7 \equiv 7 \pmod{7}$ بنابراین x-امین روز سال مانند ۵-امین روز سال و y-امین روز سال همانند هفتمین روز سال است. چون x-امین روز سال یکشنبه است پس پنجمین روز سال نیز یکشنبه است پس هفتمین روز سال سه شنبه می باشد در نتیجه ۷ اسفند هم سه شنبه است.
۹	باید همه اعداد صحیح a را بیابیم که در معادله هم نهشتی $5a + 9 \equiv 11 \pmod{5}$ صدق کنند داریم: $5a + 9 \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 5a \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow a = 5k + 2; k \in \mathbb{Z}$
۱۰	اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ گزاره همیشه درست است $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ردیف	نمره
۱۱	
الف	$\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$
ب	گراف G را <u>همبند</u> می‌نامیم، هرگاه بین هردو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.
۱۲	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.
۱۳	$\lambda x \equiv 2 \pmod{\lambda} \xrightarrow{(\lambda, 12)=4} x \equiv 1 \pmod{\frac{12}{4}=3} \rightarrow x = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$
۱۴	
الف	رئوس
ب	طوقه
پ	مجاور
ت	زوج
۱۵	
الف	$q = \frac{8 \times 7}{2} = 28$
ب	طوقه
پ	رأس‌های
ت	K
۱۶	$\left. \begin{aligned} a 9k+4 &\xrightarrow{\times 5} a 45k+20 \\ 5 5k+3 &\xrightarrow{\times 9} a 45k+27 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a -7 \xrightarrow{a \geq 1} a=7 \Rightarrow a \text{ عددی اول است}$
۱۷	$38 \equiv 2 \pmod{36} \Rightarrow 38^{36} \equiv 2^{36} \pmod{36}$ $\Rightarrow 2^{36} + 19 \equiv 19 \pmod{36} \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 3$
۱۸	$5x + 2y = 18 \Rightarrow 5x \equiv 18 \pmod{2} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x = 2k$ $\Rightarrow 5(2k) + 2y = 18 \Rightarrow 2y = 18 - 10k \Rightarrow y = -5k + 9$
۱۹	
پ	
۲۱	

ردیف	نمره	
		الف
		m^2
		ب نسبت به هم اول
		پ
		۲۱
۲۰	۱	$a 7k+1 \Rightarrow a 28k+4$ $a 4k+3 \Rightarrow a 28k+21$ $a 17(a-17) \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a=1 \text{ یا } a=17$
۲۱	۱	(الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد، آنگاه داریم: $4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$ مربع کامل (پ) دو عدد صحیح متوالی را به صورت n و $n+1$ در نظر می گیریم. فرض می کنیم $d = (n, n+1)$ باشد، در این صورت داریم: $d 1 \Rightarrow d=1$ $\left. \begin{matrix} d n+1 \\ d n \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}}$ موارد الف و پ در متن کتاب موجود بوده و درست هستند. مورد «ب» تمرین کتاب است به صورت: «میانگین پنج عدد صحیح متوالی، همان عدد وسطی است» که چون کلمه «متوالی» را ندارد نادرست است. مورد «ت» در تمرینات کتاب بوده و نادرست است و مثال نقض دارد: $\begin{array}{ccccccc} 2 & & 4, 3 & & 9 & 12 & + & 3 & / & 4 & + & 9 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ a & & b & c & d & & a+b & & c+d & & & \end{array}$ (الف) فرض کنیم $k = a(a+1)$ و $a \in \mathbb{Z}$ و در نتیجه: $k = a^2 + a$ $\Rightarrow 4k+1 = 4a^2+4a+1 = (2a+1)^2 \rightarrow \text{مربع کامل است}$ (پ) درست است. (صفحه ۳ و ۸ و ۱۶ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) درست (۲۵، نمره) (ب) نادرست (۲۵، نمره) (پ) درست (۲۵، نمره) (ت) نادرست (۲۵، نمره)
۲۲	۱	(الف) درست است؛ زیرا (صفحه ۱۹ کتاب درسی) $(4k+3) - (4k'+3) = 4k - 4k' = 4 \underbrace{(k-k')}_q = 4q$ (ب) نادرست است؛ زیرا به ازای $a=5, b=3, c=5, m=10$ رابطه $ac \equiv bc \pmod{m}$ برقرار است اما رابطه $a \equiv b \pmod{m}$ برقرار نیست. (صفحه ۲۰ و ۲۲ کتاب درسی) $25 \equiv 15 \rightarrow 5 \times 5 \equiv 3 \times 5 \rightarrow 5 \equiv 3 \pmod{5} \text{ (نادرست)}$ (ج) درست است؛ زیرا (صفحه ۲۰ کتاب درسی)

ردیف	نمره	
	۱	$a \stackrel{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a^n \stackrel{m}{\equiv} b^n$ (د) نادرست است؛ زیرا معادلهٔ همنهشتی $ax \stackrel{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) b$ (صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) درست (۲۵، ۲۵ نمره) ب) نادرست (۲۵، ۲۵ نمره) ج) درست (۲۵، ۲۵ نمره) د) نادرست (۲۵، ۲۵ نمره)
۲۳	۱.۲۵	معادله جواب دارد $\Rightarrow (4, 6) = 2 1 \circ$ $4x \stackrel{6}{\equiv} 1 \circ \rightarrow 4x \stackrel{6}{\equiv} 4 \xrightarrow{(4, 6)=2} x \stackrel{3}{\equiv} 1 \rightarrow x = 3k + 1$ (صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (۵، ۲۵ نمره) معادله جواب دارد $\Rightarrow (4, 6) = 2 1 \circ$ $4x \stackrel{6}{\equiv} 1 \circ \rightarrow \underbrace{4x \stackrel{6}{\equiv} 4}_{(4, 6)=2} \xrightarrow{\div 4} \underbrace{x \stackrel{3}{\equiv} 1}_{(4, 6)=2} \rightarrow x = 3k + 1 \text{ (۲۵، ۲۵ نمره)}$
۲۴	۱.۵	a^2 فرد است؛ پس a نیز فرد است و چون $a + 4$ فرد است، از رابطهٔ $3b a + 4$ نتیجه می‌شود که b نیز فرد است و داریم: $a^2 + 2b^2 - 1 \circ = 8q + 1 + 2(8q' + 1) - 1 \circ = 8(q + 2q') - 7 = 8(\underbrace{q + 2q' - 1}_k) + 1$ $= 8k + 1 \rightarrow \text{باقی‌مانده} = 1$ (صفحهٔ ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: a^2 فرد است؛ پس a نیز فرد است (۲۵، ۲۵ نمره) و چون $a + 4$ فرد است (۲۵، ۲۵ نمره)، از رابطهٔ $3b a + 4$ نتیجه می‌شود که b نیز فرد است (۲۵، ۲۵ نمره) و داریم: $a^2 + 2b^2 - 1 \circ = \underbrace{8q + 1 + 2(8q' + 1)}_{(25, 25 \text{ نمره})} - 1 \circ = 8(q + 2q') - 7 = 8(\underbrace{q + 2q' - 1}_k) + 1$ $= 8k + 1 \rightarrow \underbrace{\text{باقی‌مانده}}_{(25, 25 \text{ نمره})} = 1$
۲۵	۱	روش اول: واضح است که $a^3 - a = (a - 1) \times a \times (a + 1)$ یعنی $a^3 - a$ برابر حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی است. می‌دانیم که بین هر سه عدد صحیح متوالی، یکی از آنها مضرب ۳ است. بنابراین، حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش پذیر است. در نتیجه $3 a^3 - a$ روش دوم: اگر a را بر سه تقسیم کنیم، بنابر قضیهٔ تقسیم، سه حالت $a = 3k$ و $a = 3k + 1$ و $a = 3k + 2$ را خواهیم داشت: حالت اول: $a = 3k; k \in \mathbb{Z} \rightarrow a^3 - a = (3k)^3 - (3k) = 3k(3k^2 - 1) \Rightarrow 3 a^3 - a$ حالت دوم: $a = 3k + 1; k \in \mathbb{Z} \rightarrow a^3 - a = (3k + 1)^3 - (3k + 1)$ $\rightarrow a^3 - a = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 - 1) = 3(3k + 1)(3k^2 + 2k) \Rightarrow 3 a^3 - a$ حالت سوم: $a = 3k + 2; k \in \mathbb{Z} \rightarrow a^3 - a = (3k + 2)^3 - (3k + 2)$ $\rightarrow a^3 - a = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 - 1) = 3(3k + 2)(3k^2 + 4k + 1) \Rightarrow 3 a^3 - a$

ردیف	نمره
۱	اگر $ab \mid b + c$ گزاره‌های زیر را نتیجه بگیرید: (الف) $b \mid c$ (ب) $a \mid b^2 - c^2$ (ج) $a \mid b^3 + c^3$
۲	اگر y, x جواب‌هایی از معادله سیاله $11y + 14x = 56$ باشند آنگاه باقیمانده تقسیم x بر ۱۱ را بیابید:
۳	ثابت کنید اگر a و b عدد صحیح و مخالف صفر باشند آنگاه $(a, b) = ab $, $[a, b]$.
۴	فرض کنید a و b اعدادی صحیح باشند دست کم یکی از آنها صفر نباشد ثابت کنید: $(ka, kb) = k(a, b) ; k \in \mathbb{N}$
۵	فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید: $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$
۶	فرض کنید $1 = ax - by$ حاصل $(a + b, x + y)$ را بیابید:
۷	با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام یعنی، $(a + b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$ ثابت کنید که برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ همواره $(a + b)^n \equiv a^n + b^n$.
۸	شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد).
۹	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.
۱۰	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$)
۱۱	به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
۱۲	جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را به دست آورید.
۱۳	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $2 \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
۱۴	ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.
۱۵	

ردیف	نمره	
		درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:
		(الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.
		(ب) اگر $a b + c$ آنگاه $a b$ یا $a c$.
		(پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است.
۱۶		باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ است، باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)
۱۷	۱	اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a 7k + 1$ و $a 4k + 3$ ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 17$.
۱۸	۱.۷۵	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد a یا $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.
۱۹	۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید: (الف) تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} x = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$ ، مضرب ۴ است. (ب) اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ آنگاه $a \equiv b \pmod{m}$. (ج) طرفین رابطه همنهشتی را می‌توان به توان هر عدد طبیعی رساند. (د) معادله همنهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, b) m$.
۲۰	۲	در هر مورد گزینه درست را انتخاب کنید: (الف) باقی‌مانده تقسیم $13^{41} - 12^{41} - 25^{41}$ بر ۱۵۶ کدام است؟ (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۱۱ (ب) کدام معادله در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟ (۱) $7x \equiv 17 \pmod{12}$ (۲) $51x \equiv 11 \pmod{6}$ (۳) $8x \equiv 20 \pmod{12}$ (۴) $15x \equiv 80 \pmod{10}$ (ج) رقم یکان عدد $1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ کدام است؟ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (د) عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
۲۱	۱.۲۵	اگر دو عدد $7a - 4$ ، $4a - 7$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $6a + 9$ را به دست آورید.
۲۲	۰.۷۵	درستی و یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید:
		(الف) حاصل عبارت $(30, [-12, -18])$ برابر ۶- است. () نماد ب‌م و [] نماد کم‌م است.
۲۳	۲	(الف) در حالت کلی ثابت کنید: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}; a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ (ب) باقیمانده تقسیم $3 + 13^{1403} \times 5$ بر ۱۷ را به دست آورید.

ردیف	نمره	
۲۴	۱	جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را به دست آورید.
۲۵	۱.۲۵	برای هر دو عدد حقیقی a و b، گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: $۵a^۲ + b^۲ \geq ۴ab$

ردیف	نمره
۱	الف) $ab b+c \rightarrow \frac{b}{b} b+c \rightarrow b c$ ب) $\frac{ab b+c}{a ab} \rightarrow a b+c \rightarrow a (b+c)(b-c) \rightarrow a b^2-c^2$ ج) $\frac{a b+c}{b+c b^3+c^3} \rightarrow a b^3+c^3$
۲	می توان نوشت: $14x + 11y = 56 \rightarrow 14x \equiv 56 \xrightarrow{14 \equiv 2} 3x \equiv 56 - 55 \rightarrow 3x \equiv 1$ $\rightarrow 3x \equiv 11 + 1 \equiv 12 \xrightarrow{(3,11)=1} x \equiv 4$ بنابراین هر x ای که در معادله مذکور صدق کند در تقسیم بر ۱۱ باقیمانده ۴ می آورد.
۳	فرض کنید $(a, b) = d$ داریم: $(a, b) = d \rightarrow \begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \\ (a', b') = (\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1 \end{cases} \rightarrow [a, b] = a'b' d$ $[a, b] \cdot (a, b) = a'b' d^2 = a'd \cdot b'd = a \cdot b $
۴	فرض کنید $(a, b) = d$ در اینصورت $d b, d a$ در نتیجه $kd kb, kd ka$ بنابراین داریم: $kd (ka, kb)$ در نتیجه عددی طبیعی مانند q وجود دارد که $(ka, kb) = kdq$ به این ترتیب $kdq kb, kdq ka$ بنابراین $dq b, dq a$ یعنی $dq d$ پس $q 1$ در نتیجه $q = 1$ حال می توان نوشت: $(ka, kb) = kd = k(a, b)$
۵	فرض کنیم $d = (n! + 1, (n+1)! + 1)$ داریم: $\begin{cases} d n! + 1 \\ d (n+1)! + 1 \end{cases} \rightarrow d (n+1)! + 1 - (n+1)(n! + 1) \rightarrow d n$ حال از $d n, d n! + 1$ نتیجه می گیریم: $\begin{cases} d n \\ d n! + 1 \end{cases} \rightarrow d n! + 1 - (n-1)! \times n \rightarrow d 1 \rightarrow d = 1$
۶	فرض کنید $(a+b, x+y) = d$ آنگاه: $\left. \begin{matrix} d a+b \rightarrow d x(a+b) \\ d x+y \rightarrow d b(x+y) \end{matrix} \right\} \rightarrow d ax + bx - bx - by \text{ \textbf{mod} } ax - by \text{ \textbf{mod} } $ بنابراین $d = 1$.
۷	اگر $n = 1$ واضح است که $(a+b)^1 = a^1 + b^1$ پس فرض می کنیم $n \geq 2$ باشد: $(a+b)^n - (a^n + b^n) = \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1}$ $= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$ $\Rightarrow ab (a+b)^n - (a^n + b^n) \Rightarrow (a+b)^n \equiv a^n + b^n$
۸	باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله سیاله خطی $7x + 9y = 73$ را به دست آوریم:

ردیف	نمره
	$7x \equiv 73 \xrightarrow{73 \equiv 1} 7x \equiv 1 \equiv 1 + 3 \times 9 \equiv 28 \xrightarrow{(7,9)=1} x \equiv 4 \Rightarrow x = 9k + 4$ $7(9k + 4) + 9y = 73 \Rightarrow 9y = 73 - 7 \times 9k - 28 \Rightarrow y = 5 - 7k$ بنابراین صورت کلی جواب معادله سیاله $7x + 9y = 73$ به فرم زیر است: $\begin{cases} x = 9k + 4 \\ y = 5 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ حال برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم: $\begin{cases} 9k + 4 \geq 0 \\ 5 - 7k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq 0 \end{cases}$ بنابراین تنها به‌ازای $k = 0$ جواب صحیح و نامنفی برای معادله به‌دست می‌آید بنابراین این شخص فقط به یک طریق توانسته این امتیاز را به‌دست آورد.
۹	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$ اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است. با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.
۱۰	$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0, \quad (y - 1)^2 \geq 0, \quad (x - y)^2 \geq 0$
۱۱	$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد.
۱۲	معادله سیاله دارای جواب است زیرا $(9, 13) = 1 \mid 7$ $13y \equiv 7, (13 \equiv 4, 7 \equiv 16) \rightarrow 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \equiv 4 \rightarrow y = 9k + 4$ در نتیجه با جایگذاری $y = 9k + 4$ در معادله سیاله $9x + 13y = 7$ داریم: $x = -13k - 5$
۱۳	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است.
۱۴	باقی‌مانده هر عدد بر ۴ به یکی از صورت‌های زیر است: $p = 4k (1), p = 4k + 1 (2), p = 4k + 2 (3), p = 4k + 3 (4)$ در حالت (۱) و (۳)، عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.
۱۵	
	الف) درست
	ب) نادرست
	پ) نادرست

ردیف	نمره
۱۶	$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \\ \hline \rightarrow a = 20q' - 1 \rightarrow a = 20q^n + 19 \end{cases}$
۱۷	۱ $a 7k+1 \Rightarrow a 28k+4$ $a 4k+3 \Rightarrow a 28k+21$ $a 17(a-17) \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1 \text{ یا } a = 17$
۱۸	هر عدد صحیح در تقسیم بر ۳ به یکی از صورت‌های $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ خواهد بود. حکم برقرار است. $a = 3k$ حکم برقرار است. $a = 3k+1 \rightarrow a+2 = 3k+3 = 3(k+1)$ حکم برقرار است. $a = 3k+2 \rightarrow a+4 = 3k+6 = 3(k+2)$ (صفحه ۱۷ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: هر عدد صحیح در تقسیم بر ۳ به یکی از صورت‌های $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ (۵، نمره) خواهد بود. اگر $a = 3k$ (حکم برقرار است. ۲۵، نمره) اگر $a = 3k+1 \rightarrow a+2 = 3k+3 = 3(k+1)$ (حکم برقرار است. ۵، نمره) اگر $a = 3k+2 \rightarrow a+4 = 3k+6 = 3(k+2)$ (حکم برقرار است. ۵، نمره)
۱۹	(الف) درست است؛ زیرا (صفحه ۱۹ کتاب درسی) $(4k+3) - (4k'+3) = 4k - 4k' = 4(k-k') = 4q$ (ب) نادرست است؛ زیرا به ازای $a=5, b=3, c=5, m=10$ رابطه $ac \equiv bc \pmod{m}$ برقرار است اما رابطه $a \equiv b \pmod{m}$ برقرار نیست. (صفحه ۲۰ و ۲۲ کتاب درسی) نادرست $25 \equiv 15 \rightarrow 5 \times 5 \equiv 3 \times 5 \rightarrow 5 \equiv 3 \pmod{5}$ (ج) درست است؛ زیرا (صفحه ۲۰ کتاب درسی) $a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a^n \equiv b^n \pmod{m}$ (د) نادرست است؛ زیرا معادلهٔ همنهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) b$ (صفحه ۲۵ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) درست (۲۵، نمره) (ب) نادرست (۲۵، نمره) (ج) درست (۲۵، نمره) (د) نادرست (۲۵، نمره)
۲۰	(الف) گزینه ۱: طبق رابطه $a^n + b^n \equiv (a+b)^n \pmod{ab}$ اگر $a=12, b=13, n=41$ بگیریم، داریم: $(12+13)^{41} \equiv 12^{41} + 13^{41} \pmod{156} \rightarrow 25^{41} - 12^{41} - 13^{41} \equiv 0 \pmod{156}$ (صفحه ۲۹ کتاب درسی) (ب) گزینه ۲: معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ جواب دارد اگر و فقط اگر $(a, m) b$ پس هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: گزینه ۱: $(7, 12) = 1 17 \checkmark$ گزینه ۲: $(51, 6) = 3 11 \times$ گزینه ۳: $(8, 12) = 4 20 \checkmark$ گزینه ۴: $(15, 10) = 5 80 \checkmark$

ردیف	نمره	
	۲	(صفحه ۲۵ کتاب درسی) (ج) گزینه ۴: رقم یکان هر عدد برابر است با باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰: $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 500! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 = 33 \equiv 3$ (صفحه ۲۳ کتاب درسی) (د) گزینه ۴: باید باقی‌مانده تقسیم ۱۳۹۸ را بر ۷ پیدا کنیم: $\begin{array}{r} 1398 \\ 7 \overline{) 1398} \\ \underline{140} \\ 199 \\ \underline{196} \\ 3 \end{array}$ $(5) \Rightarrow 1398 \in [5]_7$ (صفحه ۱۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) گزینه ۱ (۲۵، نمره) ب) گزینه ۲ (۲۵، نمره) ج) گزینه ۴ (۲۵، نمره) د) گزینه ۴ (۲۵، نمره)
	۱.۲۵	$7a - 4 \equiv 4a - 7 \rightarrow 3a \equiv -3 \xrightarrow[\div 3]{(3,10)=1} a \equiv -1$ $\xrightarrow{\times 6} 6a \equiv -6 \xrightarrow{+9} 6a + 9 \equiv 3$ مستقیماً از $3a \equiv -3$ نیز می‌توان با ضرب کردن طرفین هم‌نهشتی در ۲ به $6a \equiv -6$ رسید. (صفحه ۲۹ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $7a - 4 \equiv 4a - 7 \rightarrow 3a \equiv -3 \xrightarrow[\div 3]{(3,10)=1} a \equiv -1$ (۲۵، نمره) $\xrightarrow{\times 6} 6a \equiv -6 \xrightarrow{+9} 6a + 9 \equiv 3$ (۲۵، نمره)
	۰.۷۵	
	۲۲	
		الف) نادرست
	۲	الف) $a \equiv b \rightarrow m a - b \xrightarrow{\text{طرف دوم} \times c} m ac - bc \rightarrow ac \equiv bc$ ب) $13 \equiv 17 \xrightarrow{\text{توان}^2} 13^2 \equiv 16 \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان}^4} 13^4 \equiv 1 \xrightarrow{\times 13} 13^5 \equiv 13 \xrightarrow{\div 4} 13^5 \equiv 13 \xrightarrow{+3} 13^5 + 3 \equiv 16 \equiv -1$ (صفحه ۱۹ و ۲۱ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) $a \equiv b \rightarrow m a - b \xrightarrow{\text{طرف دوم} \times c} m ac - bc \rightarrow ac \equiv bc$ (۲۵، نمره) ب) $13 \equiv 17 \xrightarrow{\text{توان}^2} 13^2 \equiv 16 \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان}^4} 13^4 \equiv 1 \xrightarrow{\times 13} 13^5 \equiv 13 \xrightarrow{\div 4} 13^5 \equiv 13 \xrightarrow{+3} 13^5 + 3 \equiv 16 \equiv -1$ (۲۵، نمره)
	۱	روش اول:

ردیف	نمره	
	۱	روش دوم: $\forall x \equiv 11 \rightarrow \forall x \equiv 11 + (2 \times 5) \rightarrow \forall x \equiv 21$ $\xrightarrow{\div 5} x \equiv 3 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x = 5k + 3$ $\xrightarrow{\forall x + 5y = 11} \forall (5k + 3) + 5y = 11 \rightarrow y = -5k - 2$ $5y \equiv 11 \rightarrow 5y \equiv 11 + 14 \rightarrow 5y \equiv 25 \rightarrow y \equiv 5 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} y = 5k + 5$ $\xrightarrow{\forall x + 5y = 11} \forall x + 5(5k + 5) = 11 \rightarrow \forall x = -25k - 14 \rightarrow x = -5k - 2$
۲۵	۱.۲۵	روش اول: $5a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 5a^2 + b^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 + a^2 + b^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 + a^2 \geq 0$ نامساوی اخیر، همواره برقرار است و روابط بالا برگشت پذیرند. روش دوم: $5a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 5a^2 - 4ab + b^2 \geq 0$ نامساوی اخیر، همواره برقرار است. زیرا: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 16b^2 - 20b^2 = -4b^2 \leq 0 \end{cases}$ روابط بالا برگشت پذیرند. یا به طور مشابه استدلال زیر قابل قبول است: $5a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow b^2 - 4ab + 5a^2 \geq 0$ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 16b^2 - 20a^2 = -4a^2 \leq 0 \end{cases}$ نامساوی اخیر، همواره برقرار است و روابط بالا برگشت پذیرند.