

## بخش ۴: مجموعه و احتمال

تمرین اعداد حایک ری

مجموعه  $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$  دارای ۱۰ عضو است و به همین دلیل می نویسیم:

$$n(A) = 10$$

یعنی:

نماد  $n(A)$ ، تعداد عضوهای مجموعه  $A$  را نشان می دهد.

مثال: اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{3, 5, 1\}$  باشند. مقادیر  $n(A \cup B)$  و  $n(B - A)$  را مشخص کنید.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\} \rightarrow n(A \cup B) = 4$$

$$B - A = \{5\} \rightarrow n(B - A) = 1$$

مفهوم احتمال و محاسبه ی آن را سال قبل دیده ایم. در این بخش، احتمال و روش محاسبه را با استفاده از مجموعه ها با دقت بیشتری معرفی خواهیم کرد.

چند مفهوم:

یک آزمایش شانسی مثلاً پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید:

مجموعه ی تمام نتایج ممکن در انجام این آزمایش را با  $S$  نشان می دهیم. بنابراین در این مثال:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مجموعه ی  $S$  «فضای نمونه ای» نام دارد.

در هر آزمایش، هدف تعیین احتمال برخی اتفاقاتی خاص مورد نظر (مطلوب) است. اعضای یک حالت مطلوب را

داخل یک مجموعه نوشته و به آن یک «پیشامد» یا «پیشامد تصادفی» گوئیم. در نتیجه:

پیشامدها، همه ی زیرمجموعه های  $S$  هستند.

### محاسبه احتمال

احتمال رخ دادن یک پیشامد  $A$  را با  $P(A)$  نشان داده و به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال: یک تاس را پرتاب می کنیم مطلوب است احتمال آن که عدد ظاهر شده:

$$n(S) = 6$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

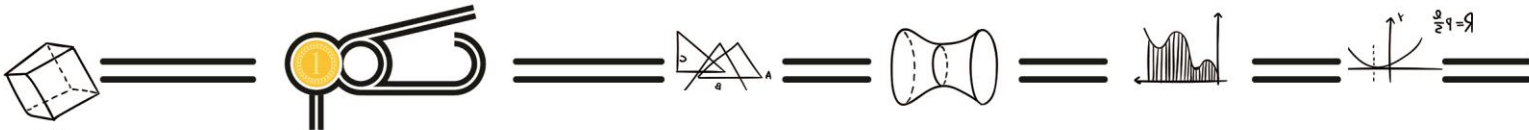
$$P(C) = \frac{0}{6} = 0$$

الف) مضرب ۵ باشد.  $A = \{5\} \rightarrow n(A) = 1$

ب) کوچک تر از ۵ باشد.  $B = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow n(B) = 4$

ج) عدد اول دو رقمی باشد.  $C = \{ \} \rightarrow n(C) = 0$

پاسخ



**مثال:** در پرتاب یک تاس، احتمال این که عدد رو آمده اول باشد برابر  $\frac{1}{3}$  است.

(درست □ نادرست □)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2, 3, 5\} \rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

پاسخ

به صورت مشابه انجام دهید ....

## پای تخته

✓ در ظرفی ۱۵ کارت با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۱۵ قرار دارد. یک کارت به صورت تصادفی (شانسی) از ظرف خارج می‌کنیم. مجموعه‌ی S را نوشته و توسط آن تعیین کنید احتمال آن که عدد روی کارت:

$$S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\} \rightarrow n(S) = 15$$

$$A = \{1, 11, 12, 13, 14, 15\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$B = \{4, 7, 8, 9\} \rightarrow n(B) = 4$$

$$C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \rightarrow n(C) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{15}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

گاهی با انجام آزمایش، دو نوع نتیجه یا حتی پیشتر ظاهر می‌شود؛ در چنین حالت‌هایی لازم است مجموعه‌ی S و پیشامدهای آن را به صورتی خاص و مناسب بنویسیم. به تفاوت فضای نمونه‌ای در دو مثال بعدی توجه کنید.

**مثال:** در پرتاب یک سکه، مجموعه‌ی S چنین نوشته می‌شود:

$$S = \{ر, پ\}$$

که در آن «ر» نشان‌دهنده‌ی ظاهر شدن روی سکه و «پ» نشان‌دهنده‌ی پشت سکه است.

\*\*\*\*\*

**مثال:** فرض کنید دو سکه را پرتاب کرده‌ایم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) هر دو سکه رو بیاید.

ب) فقط یک سکه پشت بیاید.

$$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$A = \{(1,1)\}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

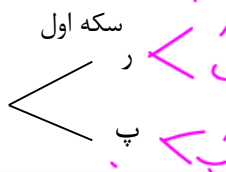
پاسخ

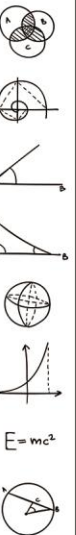
نمودار درختی

روشی آسان برای نوشتن مجموعه‌ی S هنگامی که اعضای آن دو یا چند نتیجه را نشان می‌دهند. استفاده از «نمودار درختی»

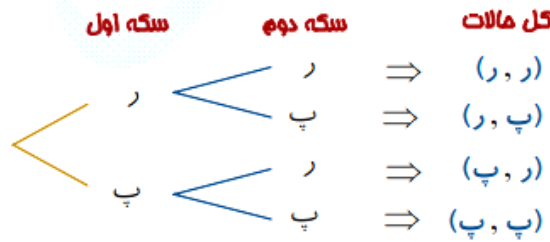
به صورت زیر است. برای نمونه وقتی دو سکه پرتاب می‌شود:

■ سکه‌ی اول می‌تواند رو یا پشت ظاهر شود:





در هر یک از دو حالتی که برای سکه‌ی اول رخ می‌دهد، سکه‌ی دوم ممکن است رو یا پشت ظاهر گردد:



می‌پینید که:

حرکت از ریشه به سمت برگ‌ها (از چپ به راست)، تمام عضوهای  $S$  را مشخص می‌کند.

مثال: یک سکه و یک تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم.

الف) تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید.  $n(S) = 12$

ب) احتمال آن که سکه رو و تاس عدد فرد ظاهر شود چقدر است؟

ج) احتمال آن که سکه پشت بیاید چقدر است؟

پاسخ

سکه تاس

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

| تاس \ سکه | ر   | پ   |
|-----------|-----|-----|
| ۱         | ر-۱ | پ-۱ |
| ۲         | ر-۲ | پ-۲ |
| ۳         | ر-۳ | پ-۳ |
| ۴         | ر-۴ | پ-۴ |
| ۵         | ر-۵ | پ-۵ |
| ۶         | ر-۶ | پ-۶ |

$A = \{(1,ر), (3,ر), (5,ر)\}$

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

روش دوم  $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

روش اول  $\Rightarrow$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

پای تخته

الف) هر دو عدد ظاهر شده فرد باشند.

ب) جمع دو عدد ظاهر شده کوچک‌تر از ۶ باشد.

ج) عدد تاس اول از عدد تاس دوم کوچک‌تر باشد.

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مجموعه‌ی  $S$  را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را بیابید:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$\{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\} \Rightarrow n(A) = 9$

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۱     | ۲     | ۳     | ۴     | ۵     |
| (۱-۱) | (۱-۲) | (۱-۳) | (۱-۴) | (۱-۵) |
| (۲-۱) | (۲-۲) | (۲-۳) | (۲-۴) | (۲-۵) |
| (۳-۱) | (۳-۲) | (۳-۳) | (۳-۴) | (۳-۵) |
| (۴-۱) | (۴-۲) | (۴-۳) | (۴-۴) | (۴-۵) |
| (۵-۱) | (۵-۲) | (۵-۳) | (۵-۴) | (۵-۵) |

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

- (۵, ۴), (۳, ۲), (۲, ۱), (۱, ۲)
- (۴, ۳), (۲, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳)
- (۳, ۲), (۲, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳)
- (۲, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴)
- (۱, ۲)

۱۵  $\rightarrow$   $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

اگر تاسی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد هر دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند؟

جواب آخر:  $\frac{5}{12}$  و  $\frac{5}{18}$  و  $\frac{1}{4}$

(استان آذربایجان شرقی - فرداد ۱۴۰۰)