فصل سوم

تعداد قطرها:

تعداد اضلاع

تعداد قطرهای چند ضلعی محدب $= \boxed{\dfrac{n(n-3)}{2}}$

* در کدام n ضلعی است که تعداد قطرها ۴ برابر تعداد اضلاع است؟

تعداد قطرها $= \dfrac{\cancel{n}(n-3)}{2} = 4\cancel{n} \Rightarrow n-3=8$

$\boxed{n=11}$

$(n-2)\times 180 = 6\times 180 = 1080^\circ$

Ex(۱): تعداد قطرهای یک چند ضلعی برابر ۲۰ است. مجموع زوایای داخلی آن کدام است؟

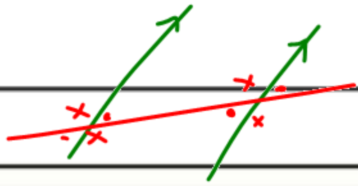
$20 = \dfrac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n(n-3) = 40 \Rightarrow n^2 - 3n - 40 = 0$

جمع — ضرب

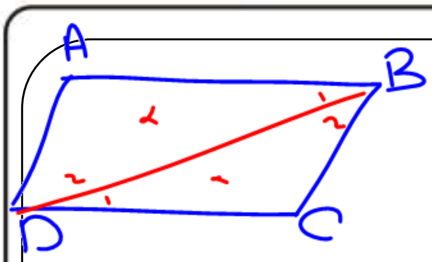
$(n+5)(n-8)=0 \Rightarrow n=-5$ ✗ , $n=8$ ✓

* تعداد قطرهای یک ۷ ضلعی، ۱۴ است.

$= \dfrac{7\times \cancel{4}}{\cancel{2}} = 14$



قضیه ۱: در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه‌اند.



فرض: متوازی‌الاضلاع

حکم: $\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$

$AB \parallel DC \xrightarrow[\text{مورب}]{BD} \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

$AD \parallel BC \xrightarrow[\text{مورب}]{BD} \hat{B}_2 = \hat{D}_2$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD \end{cases} \Rightarrow \triangle ADB \overset{\text{ز ض ز}}{\cong} \triangle BDC \Rightarrow \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهار ضلعی ضلع‌های مقابل هم‌اندازه باشند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

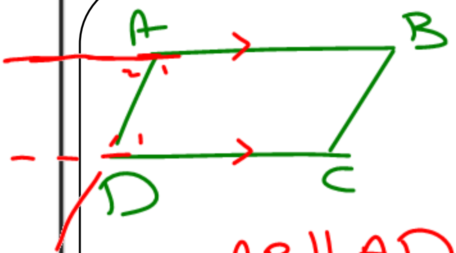
حکم: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

فرض: $\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$

$\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \\ BD = BD \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \overset{\text{ض ض ض}}{\cong} \triangle BDC$

$\hat{B}_1 = \hat{D}_1 \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$ ✓

قضیه ۲: در هر متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکملند.



حکم: $\hat{A} + \hat{D} = 180$

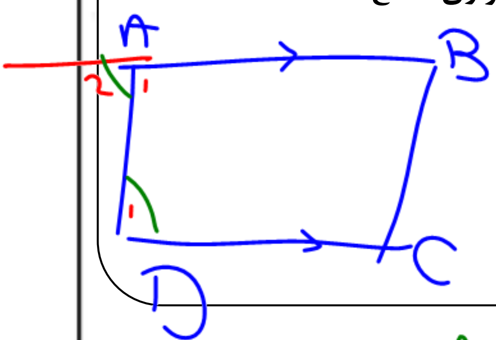
فرض: متوازی‌الاضلاع

$AB \parallel AD \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{A}_2 = \hat{D}_1$

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$

$\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 180^\circ$ ✓

عکس ضیه۲: هر چهار ضلعی که هر دو زاویه مجاور مکمل باشند متوازی‌الاضلاع است.



فرض: $\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 180$

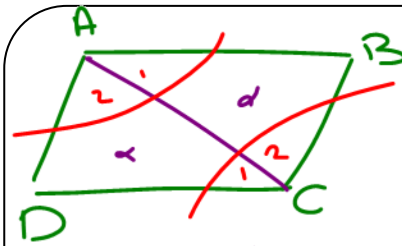
حکم: چهارضلعی متوازی‌الاضلاع

$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 180 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \end{cases}$

$\hat{D}_1 = \hat{A}_2$

$AB \parallel DC$ ← طبق عکس خطوط موازی و مورب

قضیه ۳: در هر متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه مقابل هم اندازه‌اند.



حکم: $\hat{A}=\hat{C}$ ، $\hat{B}=\hat{D}$

فرض: چهارضلعی متوازی‌الاضلاع

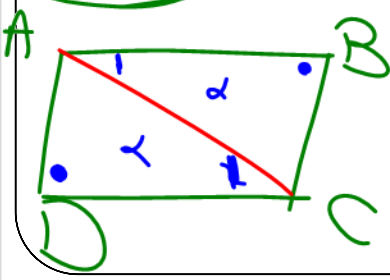
$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_1=\hat{C}_1$

$AD \parallel BC \Longrightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_2$ +

$\hat{A}=\hat{C}$

$\begin{cases} AD=BC \\ AB=DC \\ AC=AC \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \underset{\text{ض ض ض}}{\cong} \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \hat{B}=\hat{D}$

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل هم‌اندازه باشند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

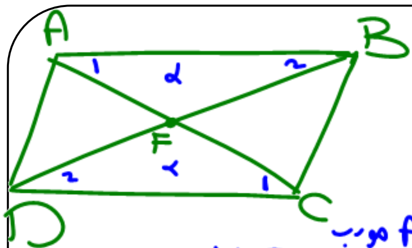


فرض: $\hat{B}=\hat{D}$

حکم: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1$ +

طبق عکس خطوط موازی و مورب $\Rightarrow AB \parallel DC$

قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

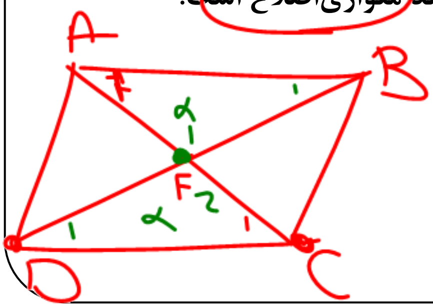


فرض: متوازی‌الاضلاع ABCD

حکم: $\begin{cases} AF=FC \\ FD=FB \end{cases}$

$\begin{cases} AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب } AC} \\ AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب } BD} \end{cases} \begin{cases} \hat{A}_1=\hat{C}_1 \\ \hat{B}_2=\hat{D}_1 \\ AB=DC \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABF} \underset{\text{ز ض ز}}{\cong} \overset{\triangle}{DFC} \Rightarrow \begin{cases} AF=FC \\ DF=FB \end{cases}$

عکس قضیه ۴: هر چهارضلعی که قطرهای آن نصف یکدیگر باشند متوازی‌الاضلاع است.



فرض: F وسط

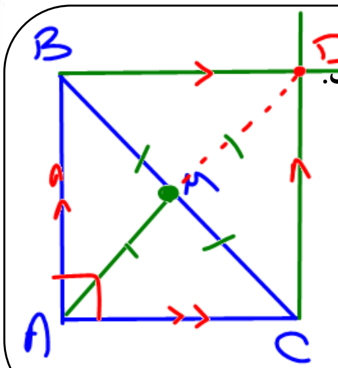
حکم: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\begin{cases} \hat{F}_1=\hat{F}_2 \\ AF=FC \\ DF=FB \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AFB} \underset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\triangle}{DFC}$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1=\hat{D}_1 \xrightarrow{\text{طبق عکس خطوط موازی}} AB \parallel DC \\ \hat{A}_1=\hat{C}_1 \longrightarrow AD \parallel BC \end{cases}$

فرض: $\hat{A}=90^\circ$ ، حکم: $AM=\frac{1}{2}BC$

قضیه ۵: در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.



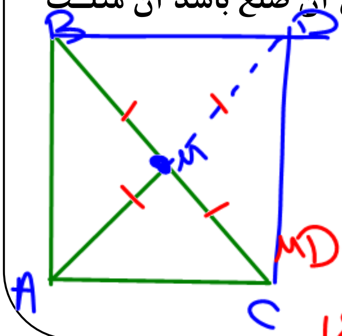
(۱) از B موازی CA و از C موازی AB رسم می‌کنیم. چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است: M وسط است.

(۲) چون $\hat{A}=90^\circ$ است، پس چهارضلعی مستطیل نیز هست. در مستطیل قطرها با هم برابرند، پس

$AM=MD=BM=MC$

$AM=\frac{1}{2}BC$

عکس قضیه ۵: اگر در مثلثی اندازه میانه وارد به یک ضلع نصف اندازه‌ی آن ضلع باشد آن مثلث قائم‌الزاویه است.



حکم: $\hat{A}=90^\circ$

فرض: $AM=\frac{1}{2}BC$

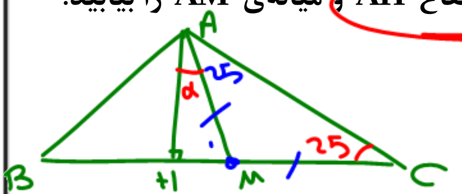
$BM=MC$ ، $AM=MD$

(۱) از B موازی AC / و از C موازی AB رسم می‌کنیم. چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است پس M وسط است.

طبق فرض $AM=BM=MC$ ـ MD

پس قطرها با هم برابرند، پس چهارضلعی مستطیل است $\Leftarrow \hat{A}=90^\circ$

Ex(۳): در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC اگر $C=25$ باشد زاویه‌ی بین ارتفاع AH و میانه‌ی AM را بیابید.

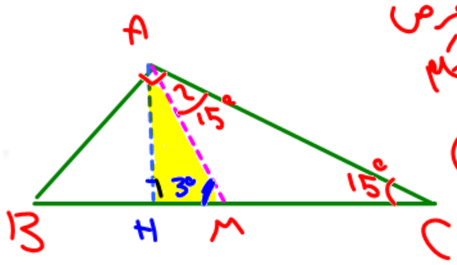


چون $AM=\frac{1}{2}BC=MC \Leftarrow$ $A\hat{M}C$ متساوی‌الساقین

$\hat{M}_1=25+25=50 \Rightarrow A\hat{H}M: 50+90+\alpha=180$

$\longrightarrow \alpha=40^\circ$

* ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه 15 دارد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است.



فرض: $\hat{C}=15^\circ$

حکم: $AH=\frac{1}{4}BC$

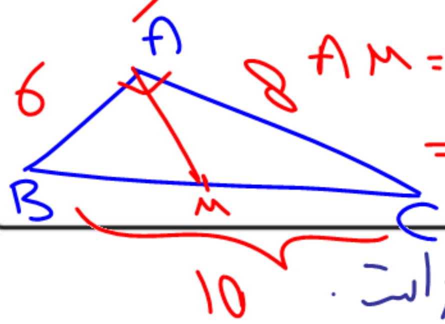
(۱) رسم میانه، مثلث $A\hat{M}C$ متساوی‌الساقین $\Leftarrow \hat{A}_2=15^\circ$

$\hat{M}_1=15+15=30^\circ$

(۲) $A\hat{H}M$: $AH=\frac{1}{2}AM$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}BC$

* در یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم 6 و 8، میانه وارد بر وتر ~~5~~ است.



$AM=\frac{1}{2}BC$

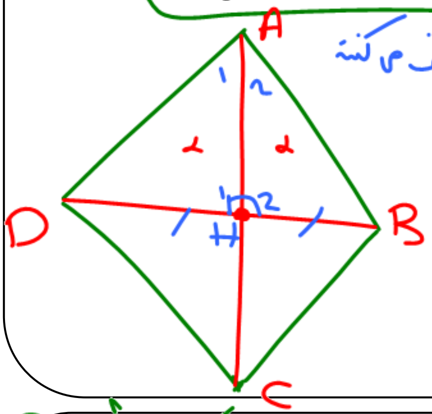
$=\frac{1}{2}\times 10=5$

* در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه 30°، نصف وتر است.

$3 \to AH = \frac{1}{4} BC \to BC = 12$

* مثلث قائم‌الزاویه‌ای زاویه $75°$ دارد، اگر ارتفاع 3 باشد وتر ___ 12 ___ است.

قضیه ۶: در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند و قطرها روی نیمساز زاویه‌ها می‌باشند



① لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است پس قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند

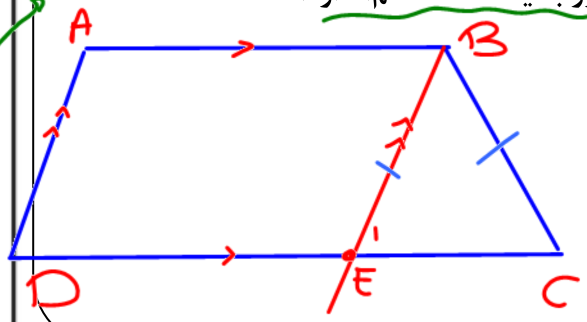
$$\begin{cases} AD = AB \\ AH = AH \\ DH = HB \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{D}H \cong A\overset{\triangle}{H}B$$

ض ض ض

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90° \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$$

$\hat{D} = \hat{C}$

قضیه ۷: در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.



فرض: $\boxed{AD = BC}$

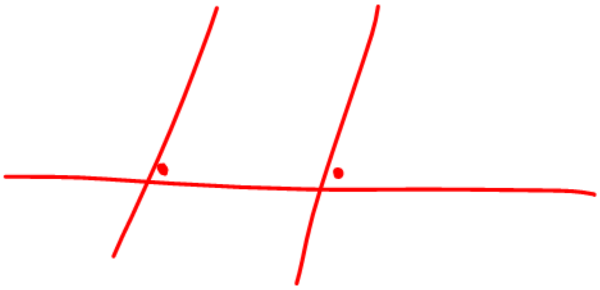
حکم: $\hat{D} = \hat{C}$

① از B موازی AD رسم می‌کنیم چهارضلعی ABDE متوازی‌الاضلاع می‌شود: $\boxed{AD = BE}$

② $AD \parallel BE \Rightarrow \hat{D} = \hat{E}_1$ مورب DE

③ طبق فرض و مقایسه مرحله ۱: $BC = BE$ ⇐ مثلث AEC متساوی‌الساقین ⇐ $\hat{E}_1 = \hat{C}$

عکس قضیه ۷: اگر در یک ذوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

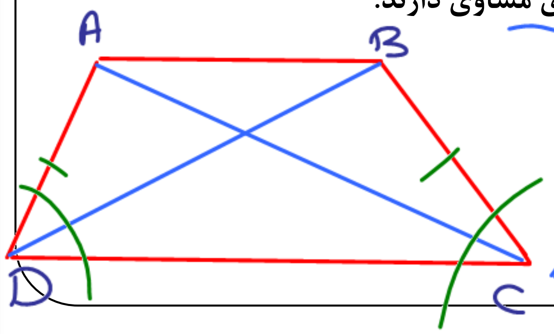


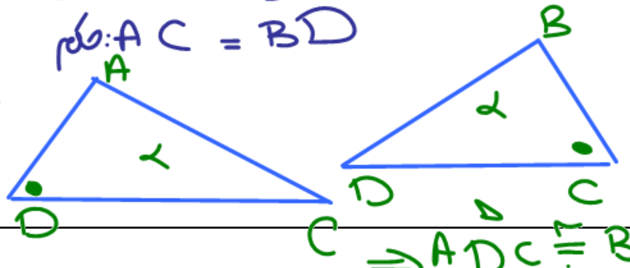
قضیه ۸: در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند.

ایفوض بینی!

فرض: ذوزنقه متساوی‌الساقین

حکم: $AC = BD$



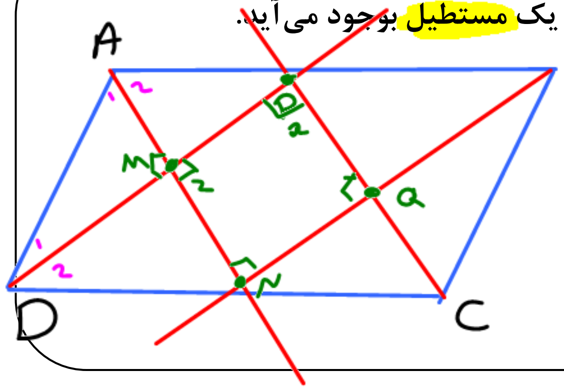


$\left.\begin{array}{l} DC = DC \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \overset{\text{ض ض ض}}{\cong} \overset{\triangle}{BDC} \Rightarrow AC = BD$

قضیه ۹: از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع یک مستطیل بوجود می‌آید.

فرض: نیمسازها رسم شده اند

حکم: $MPQN \longrightarrow$ مستطیل

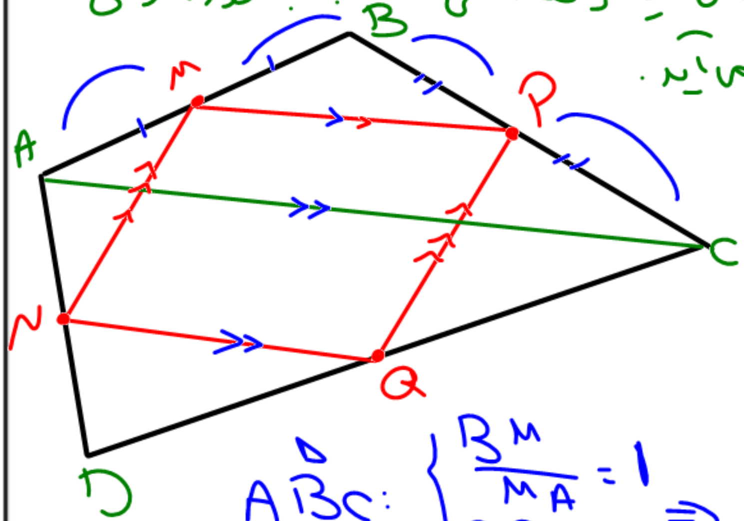


می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور مکمل‌اند $\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180 \xrightarrow{\div 2} \boxed{\frac{\hat{A}}{2}} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ$

$\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90 \rightsquigarrow \overset{\triangle}{ADM}: \underbrace{\hat{A}_1 + \hat{D}_1}_{90} + \hat{M}_1 = 180$

$\hat{M}_1 = 90^\circ \rightsquigarrow \hat{M}_2 = 90^\circ \Rightarrow$ چهارضلعی مستطیل است.

ثابت کنید از به هم وصل کردن وسط‌های یک چهارضلعی محدب به طور متوالی یک متوازی‌الاضلاع به وجود می‌آید.



فرض: M و P و Q و N وسطند

حکم: $MP \parallel NQ$, $MN \parallel PQ$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \begin{cases} \frac{BM}{MA} = 1 \\ \frac{BP}{PC} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{BP}{PC} \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} MP \parallel AC$$

$$\overset{\triangle}{ADC}: \begin{cases} \frac{DN}{AN} = 1 \\ \frac{DQ}{QC} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{DN}{AN} = \frac{DQ}{QC} \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} MP \parallel NQ$$

$$\Rightarrow AC \parallel MQ$$

مساحت‌های مهم

$S = a.b$

$S = h.a$

$S = a.b \sin \alpha$

$S = \pi r^2$

$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC$

$S = a^2 = \frac{d^2}{2}$

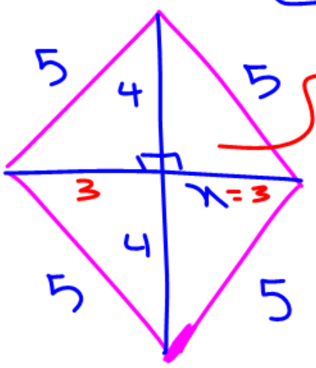
$d = \sqrt{2}a$

$S = \frac{1}{2}(a+b) \times h$

$S = \frac{1}{2} \times h \times a$

Ex(۹): در یک لوزی به ضلع ۵ اندازه‌ی قطر بزرگ ۸ است. مساحت لوزی کدام است؟

امتحانی

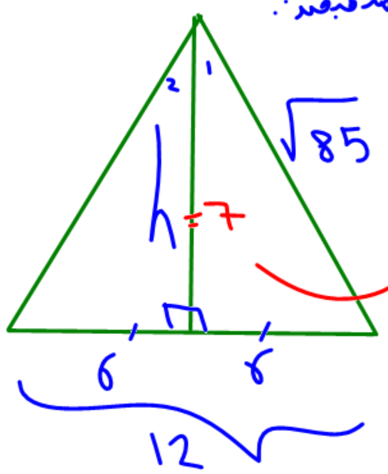


$25 = 16 + x^2 \to x^2 = 9 \to x = 3$

$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$

Ex(۱۰): طول ساق یک مثلث متساوی‌الساقین $\sqrt{85}$ و طول قاعده‌ی آن ۱۲ است. مساحت مثلث را بیابید.

* در مثلث متساوی الساقین ارتفاع، میانه، نیز برهم منطبقند.

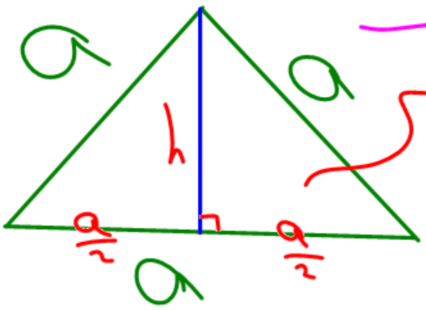


$(\sqrt{85})^2 = h^2 + 36 \to h = 7$

$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 12 = 42$

* در مثلث متساوی اضلاع ارتفاع و نیمساز و میانه برهم منطبقند.

Ex(۱۲): مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به کمک رابطه‌ی فیثاغورس پیدا کنید؟



$$a^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{a^{2}}{1}\times 4 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \xrightarrow{\sqrt{}} \boxed{h = \frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

$$S = \frac{1}{2} h \times a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}a}{2} \times a = \boxed{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

Ex(۱۳): مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۲\sqrt{۳}$ چند برابر ارتفاع آن است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱

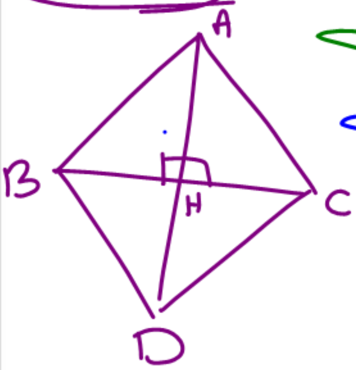
$$\frac{S}{h} = \frac{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2\cancel{\times 4}}\cancel{a^2}}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\cancel{a}} = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

---

* اگر طول ضلع یک مثلث متساوی اضلاع ۴ باشد، مساحت $4\sqrt{3}$ است.

$$S = \frac{4^2 \times \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

Ex (۱۵): ثابت کنید در هر چهارضلعی که قطرها بر هم عمودند مساحت آن برابر است با نصف حاصل‌ضرب قطرها.



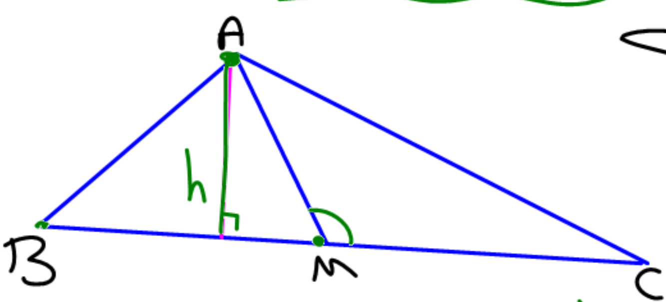
$$S = \frac{1}{2} AD \times BC$$

$$S = S_{ABC} + S_{BDC}$$

$$= \frac{1}{2} \times AH \times BC + \frac{1}{2} \times DH \times BC$$

$$= \frac{1}{2} BC (\underbrace{AH + DH}_{AD}) = \frac{1}{2} BC \times AD \checkmark$$

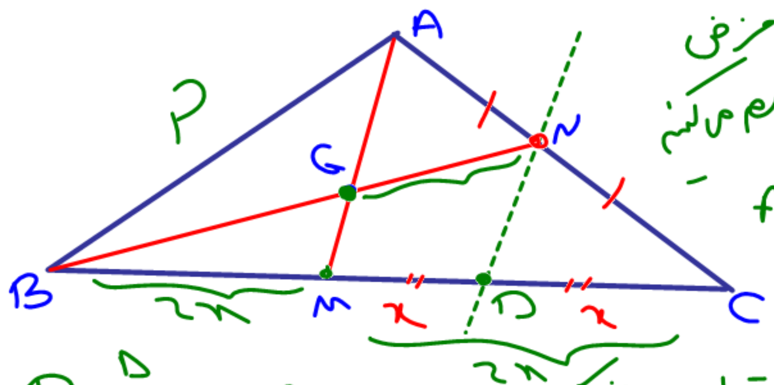
Ex (۱۶): نشان دهید با رسم هر میانه در هر مثلث، مساحت آن مثلث نصف می‌شود.



$$S_{AMB} = S_{AMC}$$

فرض: AM میانه

$$\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{h} \times \cancel{MB}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{h} \times \cancel{MC}} = 1$$



فرض: M و N و P ← وسط

① از N خطی را موازی AM رسم می‌کنیم

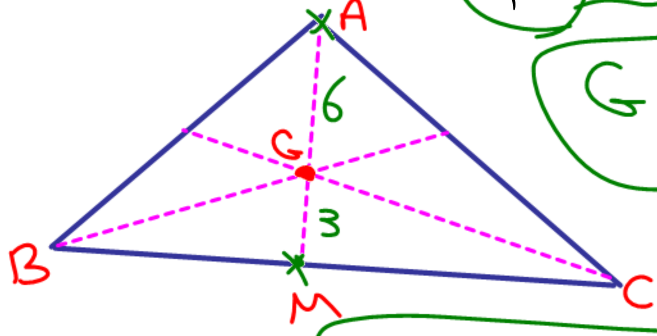
$\overset{\triangle}{AMC}: ND \parallel AM \Rightarrow \boxed{\frac{NC}{AN}} = \boxed{\frac{DN}{MD}} = 1$

② $\overset{\triangle}{BND}: GM \parallel ND \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{BG}{BN} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow BG = \frac{2}{3} BN$ یا $GN = \frac{1}{3} BN$

قضیه ۱۰: فاصله‌ی نقطه‌ی همرس میانه‌ها از وسط ضلع $\frac{1}{3}$ اندازه‌ی میانه‌ی نظیر این ضلع است.

$\boxed{GM = \frac{1}{3} AM}$

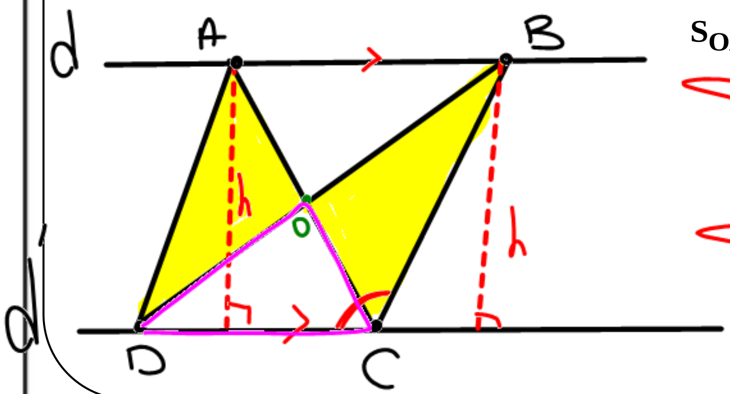


* فاصله‌ی نقطه همرس میانه‌ها تا راس $\frac{2}{3}$ میانه

$\boxed{AG = \frac{2}{3} AM}$

$\boxed{AG = 2GM}$

قضیه ۱۱: فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند، به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند ثابت کنید $S_{OAD}=S_{OBC}$



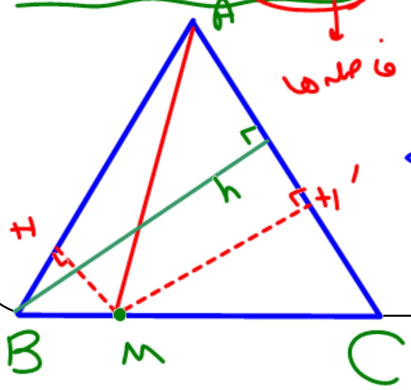
$S_{ADC}=\frac{1}{2}\times h\times DC$

$S_{BDC}=\frac{1}{2}\times h\times DC$

$S_{ADC}=S_{BDC}$

$\xrightarrow{-S_{ODC}} S_{AOD}=S_{BOC}$ ✓

قضیه ۱۲: هر نقطه که روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین، مجمـوع فواصـل آن از دو سـاق برابـر ارتفاع وارد بر ساق است.



$MH + MH' = h$

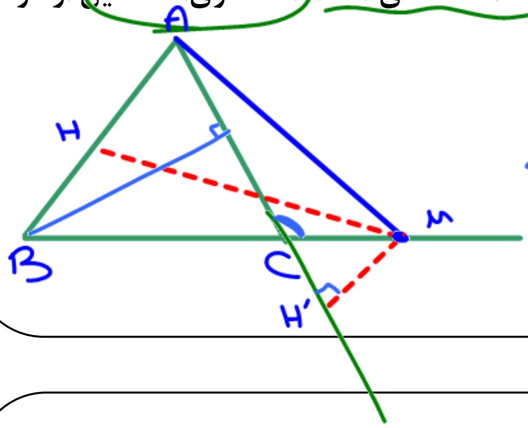
$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC}$

$\frac{1}{2} h \times AC = \frac{1}{2} MH \times \cancel{AB}^{AC} + \frac{1}{2} \times MH' \times AC$

$\cancel{\frac{1}{2}} h \cancel{AC} = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{AC} (MH + MH')$

$h = MH + MH'$

قضیه ۱۳: قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق.



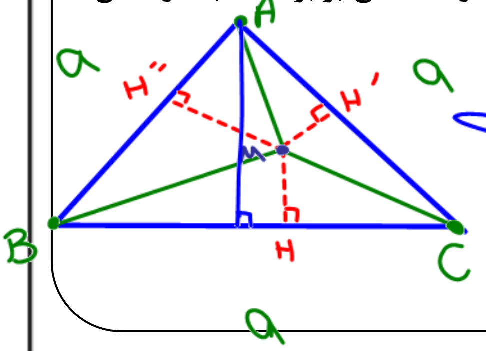
$MH - MH' = h$

$S_{ABC} = S_{AMB} - S_{AMC}$

$\cancel{\frac{1}{2}} \times h \times \cancel{AC} = \cancel{\frac{1}{2}} \times MH \times \cancel{AB} - \cancel{\frac{1}{2}} \times MH' \times \cancel{AC}$

$\boxed{h = |MH - MH'|}$

قضیه ۱۴: مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌اضلاع از سه ضلع برابر است با ارتفاع مثلث.



$MH + MH' + MH'' = h$

$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} + S_{BMC}$

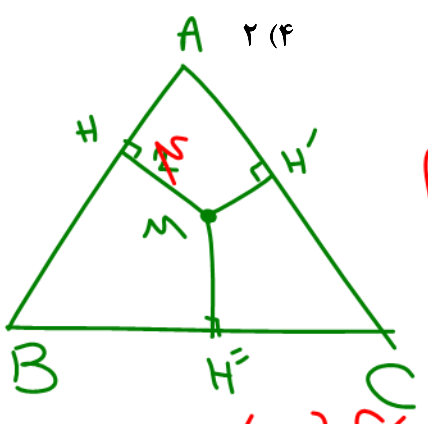
$\frac{1}{2} h \times a = \frac{1}{2} \times MH'' \times a + \frac{1}{2} \times MH' \times a + \frac{1}{2} \times MH \times a$

$\cancel{\frac{1}{2}} h \cancel{a} = \cancel{\frac{1}{2}} a (MH'' + MH' + MH)$

$h = MH'' + MH' + MH$

Ex(۲۱): در مثلث متساوی اضلاع به مساحت $۱۲\sqrt{۳}$ اگر فاصله نقطه‌ی M از داخل مثلث از ضلع AB برابر ۲ باشد، مجموع فواصل M تا دو ضلع AC و BC چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۲



$\boxed{MH} + \underbrace{MH' + MH''}_{4} = h$

$MH = 2$, $h = 6$

$S = 12\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 48$

$a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad (48 = 16 \times 3)$

$\rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}}{2} = 6$

مساحت شبکه‌ای:

نقاط مرزی　　نقاط درونی

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$