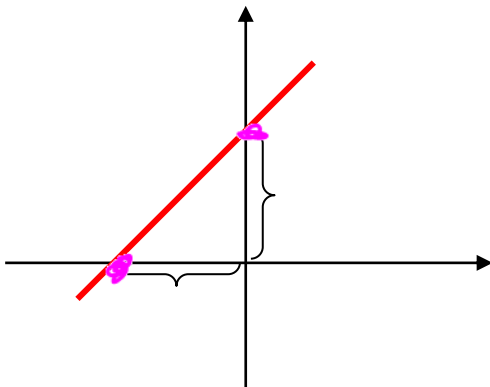


هندسه تحلیلی

خط:



(۱) معادله خط $y - y_0 = m(x - x_0)$

(۲) شیب خط $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $ax + b$

(۳) عرض از مبدأ $x = 0$

(۴) طول از مبدأ $y = 0$ (۲)

فواصل معروف:

مختصات مرکز	دو خط موازی	نقطه از خط	نقطه از نقطه
$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	$\frac{ c - c' }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ضرایب x و y هر دو خط یکسان شود	$\frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ خط ضمنی شود $ax + by + c = 0$	$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱- مربع ABCD که $A(4,1)$ و $B(6,2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

• شیب ضلع AB را بیابید و معادله آن را بنویسید.

$m = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + b$
 $1 = \frac{1}{2}(4) + b \rightarrow b = -1$
 $y = \frac{1}{2}x - 1$

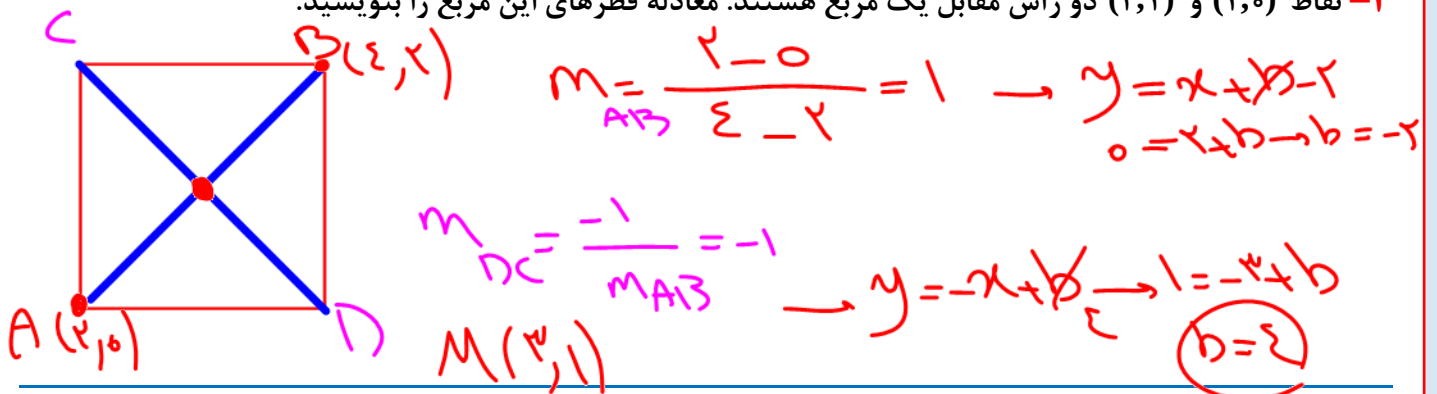
• شیب ضلع BC را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

$m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -2$
 $(4,2) \Rightarrow y = -2x + b$
 $2 = -2(4) + b \rightarrow b = 10$
 $y = -2x + 10$

• اگر $D(-1,11)$ یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.

$x: x_A + x_C = x_D + x_B \Rightarrow 4 + x = -1 + 6 \Rightarrow x = 1$
 $y: y_A + y_C = y_D + y_B \Rightarrow 1 + y = 11 + 2 \Rightarrow y = 12$

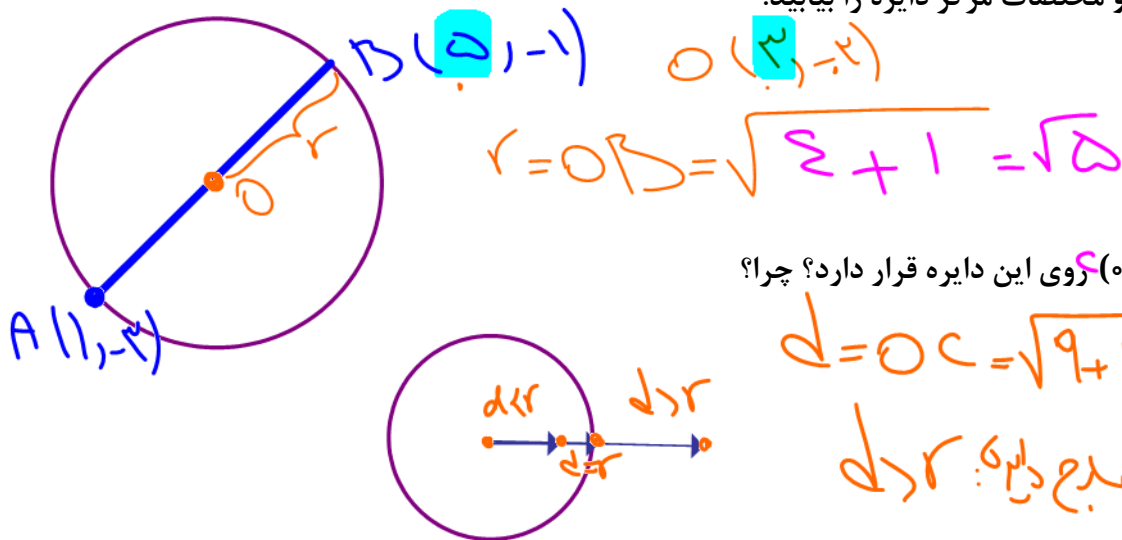
۲- نقاط $(2,0)$ و $(4,2)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادله قطره‌های این مربع را بنویسید.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌های نقاط $B(5,-1)$ و $A(1,-3)$ هستند.

• اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

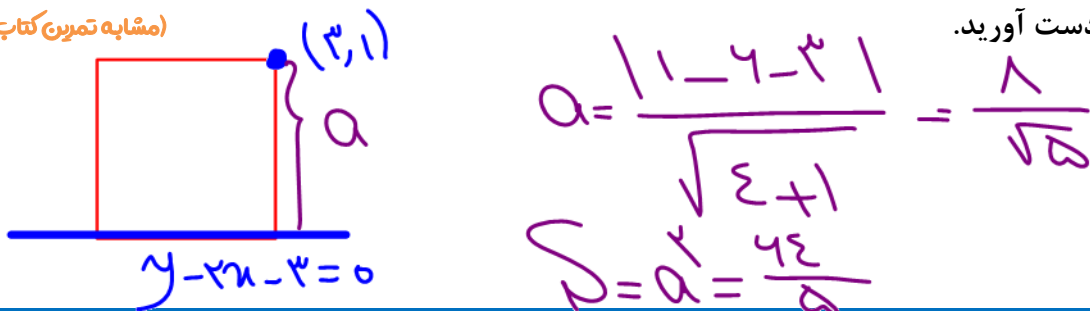


• آیا نقطه $(0,2)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

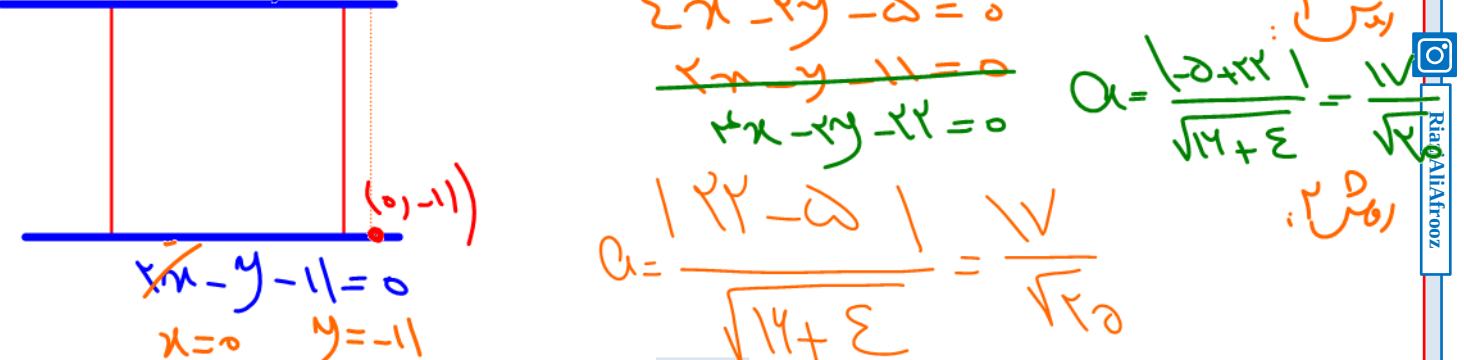
$d = OC = \sqrt{9 + 12} = \sqrt{21} = 5$
 خدع دایره: $d > r$

۴- یکی از اضلاع مربع روی خط به معادله $2x = y - 3$ واقع است. اگر نقطه $(3,1)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد. مساحت آن را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۵- دو ضلع یک مربعی منطبق بر دو خط $2x - y = 11$ و $4x - 2y = 5$ است. مساحت مربع کدام است؟





درجه دو

معادلات دو مجذوری: معادلاتی به صورت $a(\odot)^2 + b(\odot) + c = 0$

$$t \Rightarrow \dots \odot = \bigcirc \Rightarrow \dots x$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

روابط بین ریشه ها:

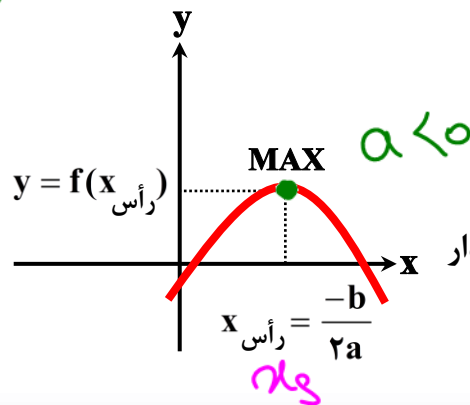
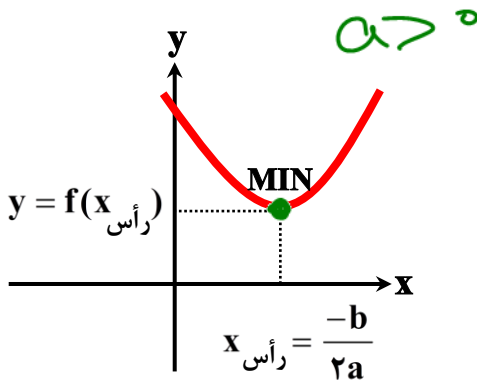
$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

نوشتن معادله درجه دو به کمک ریشه ها: $a(x^2 - Sx + P)$

نمودار تابع درجه دو:



*محور تقارن

*میانگین ریشه ها

*محل بیشترین یا کمترین مقدار

در فرم بسته عبارت درجه دو به صورت $a(x - \alpha)^2 + \beta$ ، رأس سهمی نقطه (α, β) است

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\bullet \ 5x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow 5t^2 - 4t - 1 = 0 \begin{cases} t=1 \rightarrow x=1 \rightarrow x=+1 \\ t=-\frac{1}{5} \rightarrow x^2 = -\frac{1}{5}x \end{cases}$$

$$\bullet \ x - 4\sqrt{x} + 3 = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \begin{cases} t=1 \rightarrow \sqrt{x}=1 \rightarrow x=1 \\ t=3 \rightarrow \sqrt{x}=3 \rightarrow x=9 \end{cases}$$

$$\bullet \ (x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = t \\ t^2 - 4t - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} t=-1 \\ t=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x = -1 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 & x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ x^2 - 4x = 5 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 & \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$





۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8^2 - 2 \times 4 = 64 - 8 = 56$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 8^3 - 3 \times 4 \times 8 = 512 - 96 = 416$$

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \cdot S = 4 \times 8 = 32$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۸- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن:

$$S = 4, P = -55 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 55 = 0$$

$$S = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6, P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

۹- تعیین کنید کدامیک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدامیک مینیمم؟ سپس ماکزیمم و مینیمم هریک را تعیین کنید.

• $f(x) = x^2 + 8x - 1$

$$x_g = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$y_g = 16 - 32 - 1 = -17$$

$$R = [-17, +\infty)$$

• $g(x) = -4x^2 + 10x + 3$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4}$$

$$y_s = -4\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 10\left(\frac{5}{4}\right) + 3 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 3 = \frac{25}{4} + 3 = \frac{37}{4}$$

۱۰- قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



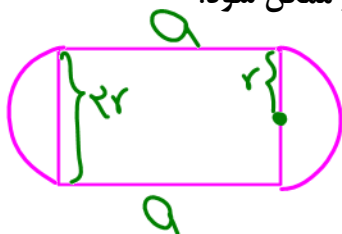
$$2a + b = 120 \rightarrow b = 120 - 2a$$

$$S = ab = a(120 - 2a) = 120a - 2a^2$$

$$a = \frac{-120}{-4} = 30 \quad b = 60$$

$$S = 1800$$

۱۱- استاد یومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استاد یومی ۲۱۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود.



$$2a + 2\pi r = 2100 \rightarrow a + \pi r = 1050$$

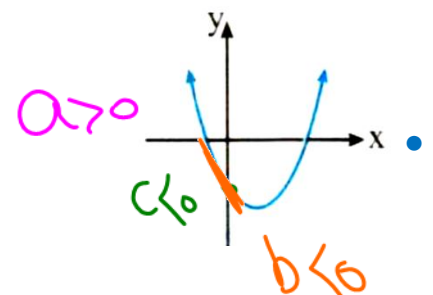
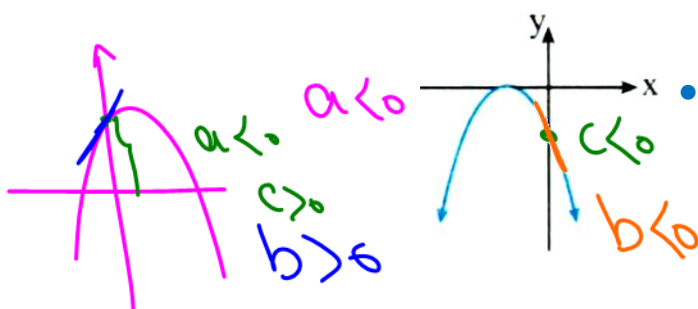
$$S = 2ra = 2r(1050 - \pi r) = 2100r - 2\pi r^2$$

$$r = \frac{2100}{4\pi} = \frac{525}{\pi}$$

$$a = 525$$

۱۲- در هریک از قسمت‌های زیر، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. علامت ضرایب a, b, c را مشخص کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)





معادلات گویا و گنگ

۱۳- هریک از معادلت زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \right) \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{matrix} \rightarrow \cancel{5(x-2)} - 4 = x(x-2)$$

$$5x - 10 - 4 = x^2 - 2x \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \rightarrow (x-2)(x-7) = 0$$

~~۲~~ ۷

$$5 - 3 = 2 \checkmark$$

$$\bullet \sqrt{2x+15} - \sqrt{x+4} = 2 \rightarrow \sqrt{2x+15} = \sqrt{x+4} + 2 \rightarrow 2x+15 = x+4+4+2\sqrt{x+4}$$

$$(x+7)^2 = (2\sqrt{x+4})^2$$

$$x^2 + 14x + 49 = 16(x+4) \rightarrow x^2 + 14x + 49 = 16x + 64$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0$$

۵ -۳

۱۴- علی و رضا ویرایش یک مجله‌ی ادبی را انجام می‌دهند. اگر رضا به تنهایی این کار را انجام دهد، ۶ ساعت و اگر دو نفر با هم انجام دهند، ۴ ساعت زمان نیاز است. علی به تنهایی در چند ساعت ویرایش مجله را انجام می‌دهد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

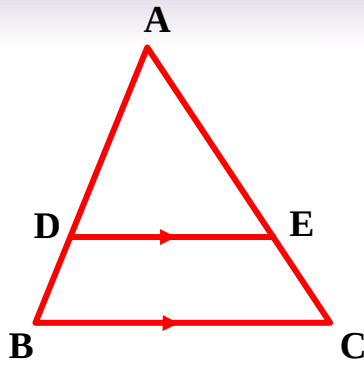
$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_{\text{کل}}}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{t_{\text{علی}}} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{t_{\text{علی}}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$t_{\text{علی}} = 6$



قضیه تالس



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

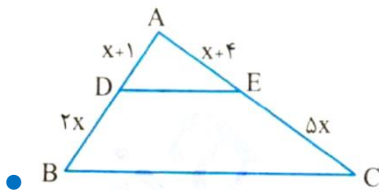
جھول لیک افیان سارک

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

~ ~ ~ موازی

۱۵- در هریک از شکل‌های زیر، پاره خط DE موازی BC است. مقادیر مجهول را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

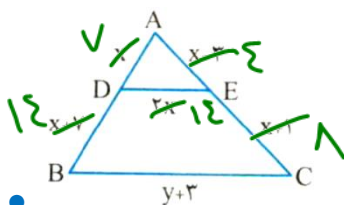


$$\frac{x+1}{2x} = \frac{x+4}{5x} \rightarrow 5x^2 + 2x = 2x^2 + 8x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x=0 \quad x=2$$

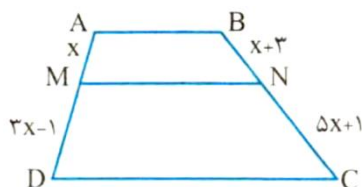


$$\frac{x}{x+1} = \frac{x-3}{x+1} \rightarrow x+x = x+2x-21$$

$$3x = 21 \rightarrow x = 7$$

$$\frac{12}{32x} = \frac{12}{y+3} \rightarrow y+3 = 24 \rightarrow y = 21$$

۱۶- در دوزنقه مقابل، اگر $MN \parallel AB$ باشد، مقدار x را به دست آورید.



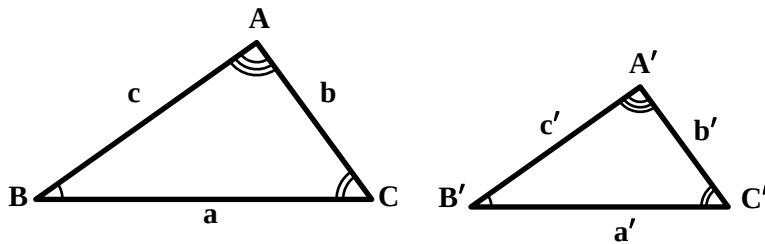
$$\frac{x}{3x-1} = \frac{x+3}{5x+1} \dots$$



تشابه مثلث ها

شروط متشابه بودن دو مثلث:

(۱) برابری زوایا:



(۲) تناسب اضلاع:

(۱) تناسب سه ضلع (ض ض ض)

(۲) تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین (ض ز ض)

(۳) تساوی دو زاویه (ز ز)

$$K = \text{نسبت ها}$$

$$K^2 = \text{مساحت}$$

۱۷- طول ضلع های مثلث ABC عبارت است از $AC = 9$ ، $BC = 7$ و $AB = 6$. طول اضلاع مثلثی را بیابید که با

مثلث ABC متشابه است و محیطش ۳۳ واحد طول است.

$$P_{ABC} = 22$$

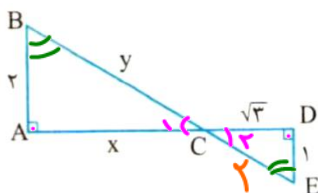
$$K = \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{33}{22} = \frac{3}{2}$$

$$K = \frac{A'B'}{AB} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{A'B'}{6} \rightarrow A'B' = 9$$

$$K = \frac{A'C'}{AC} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{A'C'}{9} \rightarrow A'C' = \frac{27}{2} = 13.5$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

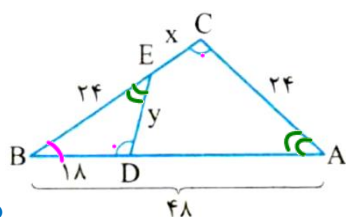
۱۸- در هر قسمت، تشابه مثلث ها را ثابت کنید و مقادیر y, x را به دست آورید.



$$1^2 + (3)^2 = CE^2 \rightarrow CE = 2$$

$$A = D \quad C_1 = C_2 \rightarrow ABC \sim CDE$$

$$K = \frac{2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad y = 2 \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



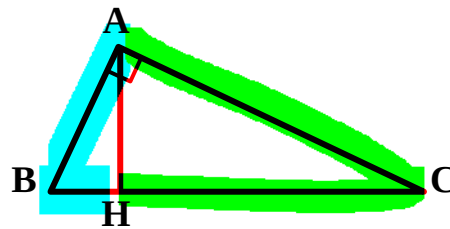
$$C = D \quad B = B \rightarrow ABC \sim BDE$$

$$\frac{24}{y} = \frac{4 \times 2}{24} = \frac{24+x}{11}$$

$$24 = 24 - y = 2 \quad 24 + x = 24 \quad x = 0$$

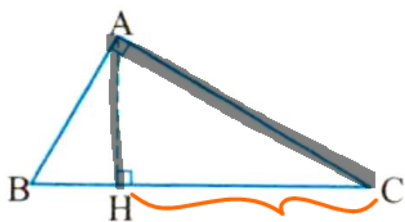
روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

۲ ضلع
فیثاغورس
 $AH \times BC = AB \times AC$
 $AH^2 = BH \times HC$ $AC^2 = CH \times BC$ $AB^2 = BH \times BC$



۱۹- در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو، در هریک از حالت‌های زیر، اندازه پاره‌خط‌های خواسته شده را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



• $CH = ?$, $AH = ?$, $AC = ۱۲$, $AB = ۵$

$AH \times ۱۳ = ۵ \times ۱۲ \rightarrow AH = \frac{۶۰}{۱۳}$
 $AC^2 = CH \times BC \rightarrow ۱۲^2 = CH \times ۱۳ \rightarrow CH = \frac{۱۴۴}{۱۳}$

• $BC = ?$, $BH = ?$, $AC = ۸$, $AH = ۴/۸$

$AH^2 + CH^2 = AC^2$

$AH^2 = BH \times CH$

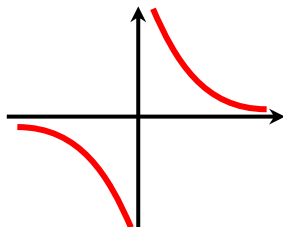
انواع توابع

دامنه

$Q(x) \neq 0$

تابع گویا: توابعی به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ در آن تابع چند جمله ای هستند و $Q(x) \neq 0$

نمودار تابع $\frac{1}{x}$:

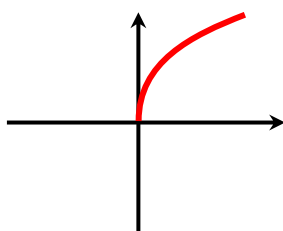


دامنه

$P(x) \geq 0$

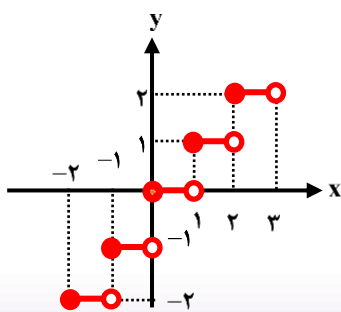
تابع رادیکالی: توابعی به فرم $\sqrt{P(x)}$ که $P(x) \geq 0$

نمودار تابع $\sqrt{x}$:



تابع پراکتی:

نمودار تابع $[x]$:



۲۰- دامنه تابع $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+ax+b}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ می باشد. a, b را به دست آورید.

* ضابطه تابع گویایی بنویسید که دامنه آن، $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ باشد.

$$S=3$$

$$P=-10$$

$$x^2 - Sx + P$$

$$x^2 - 3x - 10$$



۲۱- در هریک از قسمت‌های زیر مشخص کنید دو تابع داده شده با هم برابر هستند یا خیر. (مشابه تمرین کتاب درسی)

• $g(x) = x - 1, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \rightarrow x = -1$
 $D_g = \mathbb{R} \neq \mathbb{R} - \{-1\}$

• $\sqrt{x^2 - x} \geq 0, \sqrt{x} \sqrt{x-1}$ $x \geq 0$
 $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

• $\sqrt{x^2} = x$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

۲۲- مقادیر a, b را طوری به دست آورید که دو تابع داده شده با هم برابر باشند.

$g(x) = x + 2, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ ax - 1 & x = 2 \end{cases}$ $D_g = \mathbb{R}$ $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2a - 1 = 2$
 $2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$

$f(a) = g(a)$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۳- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

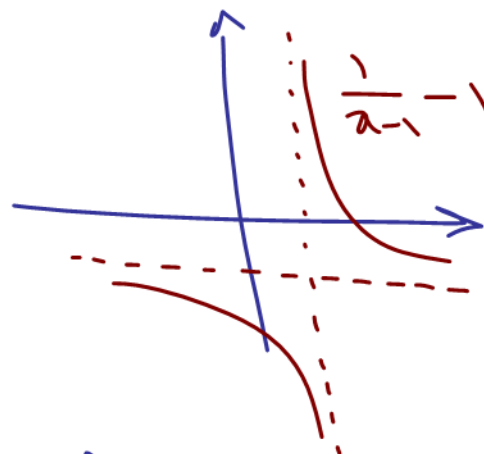
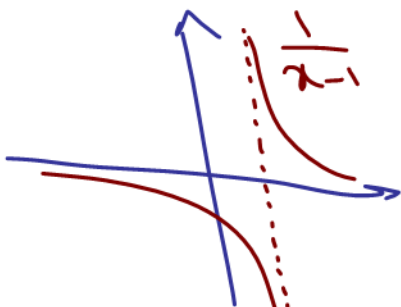
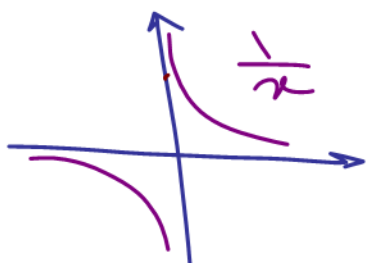
• $\left[\frac{x+1}{2}\right] = -1 \rightarrow -1 \leq \frac{x+1}{2} < 0 \rightarrow -2 \leq x+1 < 0 \rightarrow -3 \leq x < -1$

$[0] = K \in \mathbb{Z}$

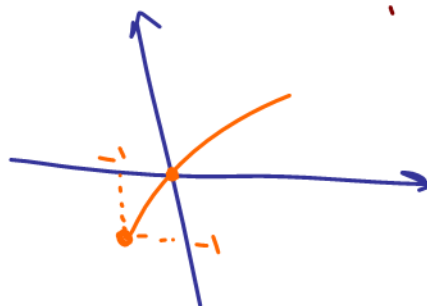
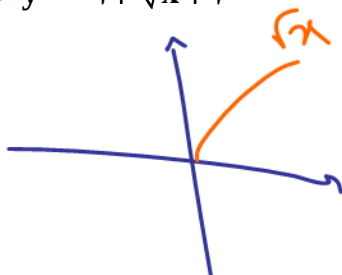
• $\left[\frac{2x^2 + 8 \sin x + 6 \cos x}{x^2 + 2x + 1 + \int_1^x x^2} \right] = 0$ $K \leq 0 < K+1$

۲۴- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

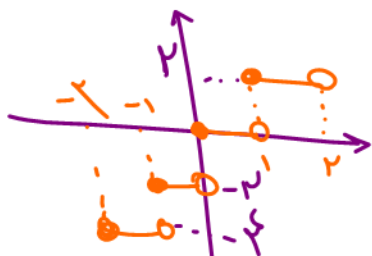
• $y = \frac{1}{x-1} - 1$



• $y = -1 + \sqrt{x+1}$



• $y = 2[x] - 3 ; x \in [-2, 2)$



۲۵- دامنه توابع زیر را به دست آورید.

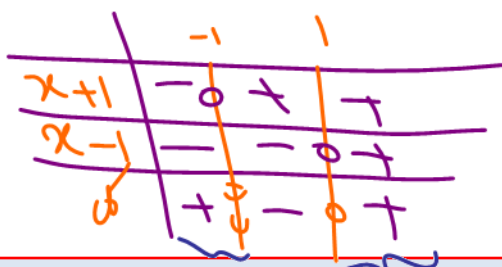
• $f(x) = \frac{x}{x^2 + 6x - 7} \neq 0$

$(x+7)(x-1) = 0$

$\mathbb{R} - \{-7, 1\}$

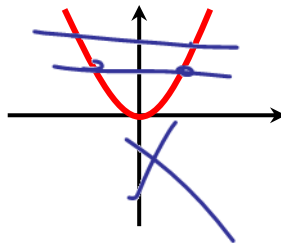
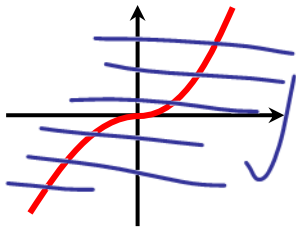
• $k(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \geq 0$

$(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$



وارون تابع و تابع یک به یک

به تابعی که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک میگوییم.



برای بررسی یک به یک بودن از

روی نمودار اگر خط های افقی رسم کنیم

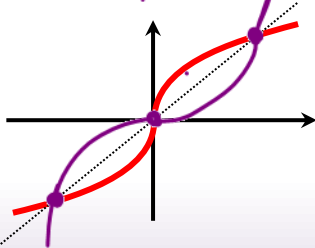
باید نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند

$$f(x) = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$$

وارون تابع: حاصل عوض شدن جای ورودی و خروجی تابع است

$$f(x) = \{(1, 2), (2, 5), (4, 4), (7, 3)\} \longrightarrow f^{-1}(x) = \{(2, 1), (5, 2), (4, 4), (3, 7)\}$$

نویسند به خط $y=x$ قرینه



۲۶- در تابع $f = \{(-2, a+b), (a-2b, 5), (6, 1), (-2, 4), (1, 5)\}$ مقادیر b, a را طوری به دست آورید که تابع داده شده، تابعی یک به یک باشد.

$$\begin{aligned} -a+b &= 2 \longrightarrow a+1=2 \longrightarrow a=1 \\ a-2b &= 1 \\ \hline 3b &= 3 \longrightarrow b=1 \end{aligned}$$

۲۷- اگر قرینه نقطه $(a-1, b+3)$ نسبت به خط $y=x$ ، نقطه $(a-1, 2b+5)$ باشد، مقادیر b, a را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (b+3, a-1) & \text{ قرینه } (a-1, 2b+5) \text{ نسبت به } y=x \\ \therefore b+3 &= a-1 \longrightarrow 1=a-1 \longrightarrow a=2 \\ a-1 &= 2b+5 \\ 2 &= 2b+5 \longrightarrow b=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$



۲۸- هریک از توابع زیر را وارون کنید.

$$\bullet f(x) = 3x + 5$$

$$y - 5 = 3x \rightarrow x = \frac{y - 5}{3}$$

$$y = \frac{x - 5}{3}$$

$$\bullet f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x = -y + 2 \rightarrow x = -2y + 4$$

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

$$\bullet f(x) = \frac{-4x + 2}{5}$$

$$5y = -4x + 2 \rightarrow 4x = -5y + 2 \rightarrow x = \frac{-5y + 2}{4}$$

$$\bullet f(x) = -2\sqrt{x} + 1$$

$$2\sqrt{x} = -y + 1$$

$$\sqrt{x} = \frac{-y + 1}{2} \rightarrow x = \left(\frac{-y + 1}{2}\right)^2$$

① ابتدا x را به حسب y بنویسید② جگه x را عوض کنید



اعمال جبری روی توابع

کافیست x های مشترک را برداشته و روی y ها عمل جبری خواسته شده را انجام دهیم

در حالت تقسیم $\frac{f}{g}$ علاوه بر دامنه مشترک دو تابع f و g باید حواسمان به دامنه کسر جدید هم باشد $g \neq 0$

۲۹- اگر $f = \{(-1, 1), (2, 4), (3, 1), (4, 0)\}$ و $g = \{(2, -1), (5, 3), (4, 2), (-1, -2)\}$ دو تابع باشند، هریک از توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

$$D_f \cap D_g = \{2, 4, -1\}$$

• $f + g$

$$\{(-1, -1), (2, 3), (4, 2)\}$$

• $\frac{g}{f}$

$$\{(-1, -2), (2, -\frac{1}{4})\}$$

• $f + 2g$

$$\{(-1, -3), (2, 2), (4, 2)\}$$

۳۰- توابع $f(x) = 3 - x^2$ و $g(x) = -2$ داده شده است.

• مقدار $(f \cdot g)(0)$ را محاسبه نمایید.

$$f(0) \times g(0) = 3 \times -2 = -6$$

• نمودار تابع $f + g$ را رسم کنید.

$$f + g = 3 - x^2 - 2 = 1 - x^2$$



۳۱- اگر $f(x) = \sqrt{x+7}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند، مطلوب است:

• محاسبه مقدار $(g + 2f)(2)$

$$g(2) + 2f(2) \\ 3 + 2 \times 3 = 9$$

• تعیین دامنه f, g و دامنه $\frac{f}{g}$

$$D_f = [-7, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \cap g} = [-7, +\infty) \mid g(x) \neq 0 \rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 1 \\ D_{\frac{f}{g}} = [-7, +\infty) - \{\pm 1\}$$