

## فصل ۱- درس ۱ - گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

♦ **تعریف گزاره:** جمله‌ای است خبری که فقط میتونه (یا الان یا در آینده) ارزشش درست یا غلط باشه.

| جمله                                  | گزاره بودن یا نبودن؟! | دلیل               |
|---------------------------------------|-----------------------|--------------------|
| امروز جمعه است.                       | ✓                     |                    |
| هفته بعد سه شنبه باران می بارد.       | ✓                     |                    |
| ۴ مهر امسال آفتاب از غرب طلوع می کند. | ✓                     |                    |
| $2+1$                                 | X                     | جمله نیست          |
| عدد ۴ خیلی کوچک است.                  | X                     | عقابل ارزشمند نیست |
| $a$ عددی گویا است.                    | ✓                     |                    |
| آیا فردا امتحان داریم؟                | X                     | پرسش               |
| بلند شو و درس بخوان.                  | X                     | امری               |
| عجب امتحان آسونی بود!                 | X                     | عاطفی              |

♦ **جبر گزاره:** به سری قرارداد و نماد که گزاره‌ها رو نشون بدیم و ارزش گذاری کنیم.

(۱) **نمایش گزاره:** حروف کوچک انگلیسی، معمولاً  $p$  یا  $q$  یا  $r$  یا ...

(۲) **ارزش هر گزاره:** درست ( $T$ ) یا نادرست ( $F$ ) (د یا ن)

(۳) **جدول ارزش گذاری (ارزشی):** در ساده ترین حالت ممکن (یک گزاره) به این شکله:

(۴) **نقیض یک گزاره:** نقیض گزاره  $p$  رو با  $\sim p$  نشون می دیم که ارزشش دقیقاً مخالف گزاره  $p$  هست.

(۱-۴) **نقیض کردن به صورت ظاهری:**

۱- نفی کردن فعل جمله

۲- اضافه کردن «چنین نیست که» به ابتدای جمله

▼ **مثال:**

(۲-۴) **نقیض کردن به صورت مفهومی:**

۱- عدد صحیح زوج  $\sim$  عدد صحیح فرد

۲- مثبت / منفی  $\sim$  نامثبت / نامنفی

۳- بزرگتر / کوچکتر  $\sim$  نابزرگتر / ناکوچکتر

▼ **مثال:**

(۳-۴) **نقیض کردن با استفاده از نماد ریاضی:**

| نامساوی          | نامساوی | هم ارزی  | زیرمجموعه     | عضو      | تساوی  | عملکرد  |
|------------------|---------|----------|---------------|----------|--------|---------|
| $<$              | $>$     | $\equiv$ | $\subset$     | $\in$    | $=$    | نماد    |
| $\geq$ یا $\leq$ | $\neq$  | $\neq$   | $\not\subset$ | $\notin$ | $\neq$ | نقیض آن |

▼ **مثال:**

$$2 \neq a$$

$$p \neq q$$

$$2 > a$$

$$2 \leq a$$

تمرین: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) مربع عددی از ۳ برابر آن عدد بزرگتر است. (ب) عدد ۵ فرد است. (پ) عدد  $b$  منفی است.

| $p$ | $q$ |
|-----|-----|
| T   | T   |
| T   | F   |
| F   | T   |
| F   | F   |

۵) جدول ارزشی چند گزاره: تعداد ردیف‌های جدول ارزشی  $2^n$

(تعداد گزاره‌هاست.)

تمرین: جدول ارزش گذاری ای که شامل ۳۲ ردیف است چند گزاره دارد؟

$$2^n = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

۶) هم‌ارزی گزاره‌ها: وقتی دو گزاره  $p$  و  $q$  هم‌ارز هستند یعنی ارزش هر دو یکسانه، هر دو درست یا هر دو غلطن. نمایش

ریاضی:  $p \equiv q$

نکته: اگر دو گزاره هم‌ارز باشند، نقیض‌اشونم هم‌ارزن:  $p \equiv q \Rightarrow \sim p \equiv \sim q$

نکته: نقیض نقیض گزاره به گزاره همیشه خود گزاره:  $\sim(\sim p) = p$

ترکیب گزاره‌ها:

اگر آنجا به عکس

| $p$          | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|--------------|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| <del>T</del> | T   | T            | T          | T                 | T                     |
| T            | F   | F            | T          | F                 | F                     |
| <del>F</del> | T   | F            | T          | T                 | F                     |
| F            | F   | F            | F          | T                 | T                     |

انتقالی مقیم صحت تالی

+

تمرین: ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید.

$$T \wedge T \equiv T$$

الف) ۲۵ مربع کامل است و  $\frac{2}{3}$  عددی گویا.

$$T \wedge T \equiv T$$

ب)  $[x(x-3) = x^2 - 3x] \wedge [(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) \geq 1]$

$$F \vee F \equiv F$$

پ)  $\frac{3}{4}$  عددی طبیعی است یا  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

ت) ۳ عددی اول است یا  $5^2$  عددی منفی است.

ث) اگر ۱۷ زوج باشد آنگاه  $\pi$  گویا است.  $F \Rightarrow F \equiv T$

ج) اگر  $\sqrt{3} > \sqrt{2} + 1$  آنگاه  $f = \{(1,2) \text{ و } (2,1)\}$  تابع است.  $F \Rightarrow T \equiv T$

ج) ۹۷ عددی اول است  $\Leftrightarrow (5, \frac{1}{2})$   $F \Leftrightarrow F \equiv T$

ح) اگر ۳ فرد نباشد آن گاه ۱۲ مربع کامل است و برعکس.  $F \Leftrightarrow F \equiv T$

تمرین: جدول زیر را کامل کنید.

| ردیف | گزاره                                         | درست | نادرست |
|------|-----------------------------------------------|------|--------|
| ۱    | اگر عدد ۲ زوج باشد آنگاه ۶ عدد اول است.       |      | *      |
| ۲    | اگر عدد ۲ زوج است آنگاه عدد ۳ فرد است و برعکس | *    |        |
| ۳    | مربع هر عدد، مثبت است و ...                   | *    |        |
| ۴    | اگر اولین روز هفته جمعه باشد آنگاه ...        | *    |        |
| ۵    | اگر آنگاه کوچکترین عدد طبیعی زوج ۱ است.       | *    |        |

تمرین: اگر گزاره درست، گزاره نادرست و گزاره دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $(\sim r \Leftrightarrow \sim p) \vee \sim q$   $T \vee F = T$   
 ب)  $r \Leftrightarrow (q \wedge r)$   $T \Leftrightarrow F = F$   
 پ)  $(p \vee r) \Rightarrow q$   $T \Rightarrow F = F$

تمرین: اگر  $p \wedge q \equiv T$  باشد درباره‌ی ارزش  $p \vee (q \wedge r)$  چه می‌توان گفت؟

$T \vee \dots \equiv T$   
 $p \equiv T$   
 $q \equiv T$

تمرین: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

عکس نقیض

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim q \Rightarrow \sim p$ |
|---|---|----------|----------|-------------------|-----------------------------|
| T | T | F        | F        | T                 | T                           |
| T | F | F        | T        | F                 | F                           |
| F | T | T        | F        | T                 | T                           |
| F | F | T        | T        | T                 | T                           |

$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

| p | q | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$ |
|---|---|----------|-------------------|-------------------|--------------------------------------------|
| T | T | F        | F                 | T                 | T                                          |
| T | F | T        | T                 | F                 | T                                          |
| F | T | F        | F                 | T                 | T                                          |
| F | F | T        | F                 | T                 | T                                          |

♦ هم‌ارزی‌های مهم:

(۱) گزاره‌های همیشه درست:

$$۱) (p \vee \sim p) \equiv T \quad ۲) (p \Rightarrow p) \equiv T$$

(۲) گزاره‌های همیشه نادرست:

$$۱) (p \wedge \sim p) \equiv F \quad ۲) (p \Leftrightarrow \sim p) \equiv F$$

(۳) خاصیت‌های مهم ترکیب شرطی:

$$۱) \text{عکس نقیض: } p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

▼ تمرین: گزاره «اگر امروزه شنبه باشد آنگاه فردا تعطیل است» را به صورت شرطی بنویسید.

مقام  
تالی  
اگر فردا تعطیل باشد آنگاه امروزه شنبه نیست

$$۲) \text{شرط به فصل: } (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

| p | q | $\sim p$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim p \vee q$ |
|---|---|----------|-------------------|-----------------|
| T | T | F        | T                 | T               |
| T | F | F        | F                 | F               |
| F | T | T        | T                 | T               |
| F | F | T        | T                 | T               |

(۴) قوانین نقیض:

$$۱) \text{دمورگان: } \sim (q \vee r) \equiv \sim q \wedge \sim r \quad \sim (q \wedge r) \equiv \sim q \vee \sim r$$

▼ تمرین: نقیض گزاره «۲۵ مربع کامل است و ۲ عددی زوج است» را بنویسید.

.. نه یا .. فرد ..

$$۲) \sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$۳) \sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

▼ تمرین: نقیض گزاره «معادله درجه دوم ۲ ریشه حقیقی متمایز دارد اگر و تنها اگر مقدار دلتا مثبت باشد» را بنویسید.

نبرد  
نامناسب

## فصل ۱- درس ۲- استدلال ریاضی

♦ تبدیل عبارت فارسی به ریاضی:

▼ تمرین: نماد ریاضی هریک از گزاره‌ی فارسی زیر را بنویسید.

(الف) حاصل ضرب هر عددی مخالف صفر در معکوسش برابر یک است.  $x \neq 0$  و  $x \times \frac{1}{x} = 1$

(ب) مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی از مکعب همان عدد بزرگتر است.  $x \in \mathbb{Z}$  و  $x^2 + (x+1)^2 > x^3$

(ت) جذر هر عدد طبیعی کوچک‌تر از مربع همان عدد است.  $x \in \mathbb{N}$  و  $\sqrt{x} < x^2$

(ث) معکوس مجموع دو عدد مثبت بزرگ‌تر یا مساوی ۳ است.  $x > 0$  و  $y > 0$  و  $\frac{1}{x+y} \geq 3$

♦ استدلال ریاضی:

(الف) قیاس استثنایی:

مقدمه ۱: اگر امشب، شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.  $P \Rightarrow Q$

مقدمه ۲: امشب شب چهاردهم ماه است.  $P$

نتیجه: ماه کامل است.  $\therefore Q$

روش ارزش ✓

مقدمه ۱: اگر قلی درس نخواند، آنگاه در آزمون مردود خواهد شد.  $P \Rightarrow Q$

مقدمه ۲: قلی در آزمون مردود شده است.  $P$

نتیجه: قلی درس نخوانده است.  $\therefore Q$

روش ارزش ✓

(ب) مغالطه:

مقدمه ۱: اگر قلی درس نخواند، آنگاه در آزمون مردود خواهد شد.  $P \Rightarrow Q$

مقدمه ۲: قلی در آزمون مردود شده است.  $Q$

نتیجه: قلی درس نخوانده است.  $\therefore P$

روش ارزش ✗

مقدمه ۱: اگر قلی درس نخواند، آنگاه در آزمون مردود خواهد شد.  $P \Rightarrow Q$

مقدمه ۲: قلی در آزمون مردود شده است.  $Q$

نتیجه: قلی درس نخوانده است.  $\therefore P$

روش ارزش ?

▼ تمرین: نام استدلال زیر چیست؟ آیا روش به کار رفته در آن درست است؟ درستی یا نادرستی نتیجه‌ی این استدلال را بررسی کنید.

مقدمه ۱: اگر دو عدد زوج باشند، آنگاه مجموع آنها نیز زوج است.

مقدمه ۲: حاصل  $a + b$  زوج است.

نتیجه:  $a$  و  $b$  هر دو زوج هستند.

▼ تمرین: جای خالی در استدلال زیر را پر کنید و بگویید نام این استدلال چیست؟ روش به کار رفته در این استدلال درست است یا نادرست؟

$P: x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$

$P: -6 < 0$

$\therefore (-4)^2 > 0$

قیاس استثنایی

(پ) عکس نقیض: طبق هم‌ارزی  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

ثابت کنید «به ازای هر عدد صحیح اگر زوج باشد، آنگاه هم زوج»

$n^2$  فرد است (زوج نیست)  $\Rightarrow n$  فرد است (زوج نیست): نقیض عکس

یعنی اثبات می‌کنیم که  $n$  فرد، پس  $n^2$  فرد

فرد

$$n \Rightarrow n = 2k + 1$$

فرد

$$\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

♦ دستور زبان ریاضی: باید ها و نبایدهای در نوشتن و حل کردن ریاضی وجود دارند:

(۱) دو طرف یک معادله رو نمی‌شه به متغیری نامشخص تقسیم کنیم. چون اگه اون متغیر صفر باشه،  $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$  ایجاد می‌شه که تعریف نشده است.

▼ مثال: به حل‌های درست و غلط معادله  $5(x - 3) = 0$  زیر توجه کنید:

(۲) در یک کسر که صورت و مخرجش به صورت جمع و تفریق هست نمی‌شه ساده سازی کرد؛ مگر اینکه به کمک تجزیه یا فاکتورگیری به ضرب تبدیلش کنیم.

▼ مثال: به ساده سازی درست و غلط عبارت  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$  توجه کنید:

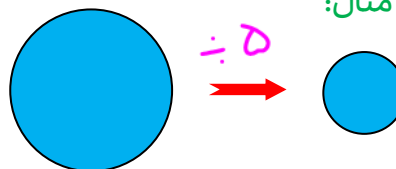
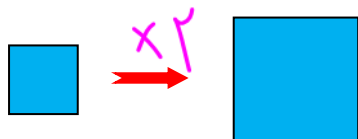
(۳) در یک نامعادله نمی‌شه طرفین رو به عددی که علامتش رو نمی‌دونیم ضرب و تقسیم کنیم، چون اگه عدد منفی باشه جهت باید عوض بشه!

۲ > ۱

$\times 9$

▼ مثال:

(۴) در شکل‌های هندسی مثل دایره، مستطیل، مثلث و ... اگر ابعاد  $k$  برابر شود محیط هم  $k$  برابر میشه اما مساحت  $k^2$  برابر می‌شه. ▼ مثال:



$$\sqrt{4 \times 9} = 2 \sqrt{9}$$

▼ تمرین: در هر یک از استدلال‌های زیر در صورت وجود خطا را مشخص کنید.

(الف)  $\frac{-2 + \sqrt{13}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{13}}{2} = -2 + \sqrt{13}$

(ب)  $x^2 - 3x = 0 \xrightarrow{\div x} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

(ت)  $a > b \xrightarrow{\times c^2} ac^2 > bc^2$

(پ) شعاع یک دایره را ۲ برابر می‌کنیم، مساحت آن نیز ۲ برابر می‌شود.

درست

غلط

## فصل ۲- درس ۱- توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

یادآوری مفهوم تابع: برای بیان مفهوم تابع یک دوچرخه سوار رو در نظر بگیرید که دایره با سرعت ۲ متر بر ثانیه حرکت میکنه:

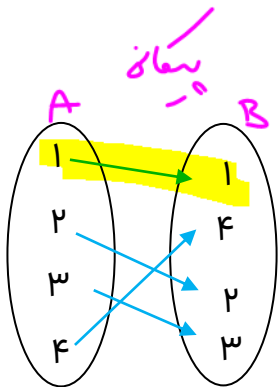


| زمان  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|-------|---|---|---|---|
| مسافت | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ |

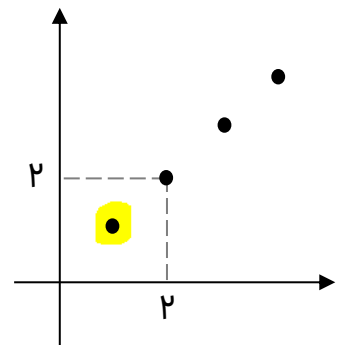
$$\Rightarrow \text{زمان} \times ۲ = \text{مسافت}$$

در این مثال متغیر مستقل ... زمان ... و متغیر وابسته ... مسافت ... است. همواره متغیر وابسته از متغیر مستقل تبعیت می‌کند یعنی متغیر وابسته تابع متغیر مستقل است.

♦ سایر نمایش‌های مختلف تابع:



$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

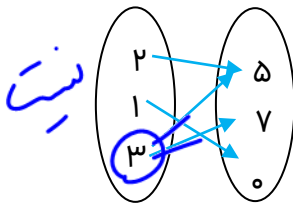


♦ برد: مجموعه تمام متغیرهای وابسته

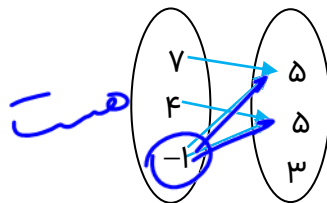
♦ دامنه: مجموعه تمام متغیرهای مستقل

♦ شرط تابع بودن: به ازای هر یه مقدار متغیر مستقل، حتماً و فقط یه مقدار متغیر وابسته داشته باشیم.

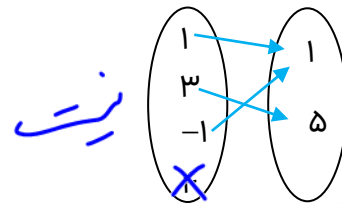
▼ تمرین: کدام یک از روابط زیر نمایش یک تابع می‌باشد؟



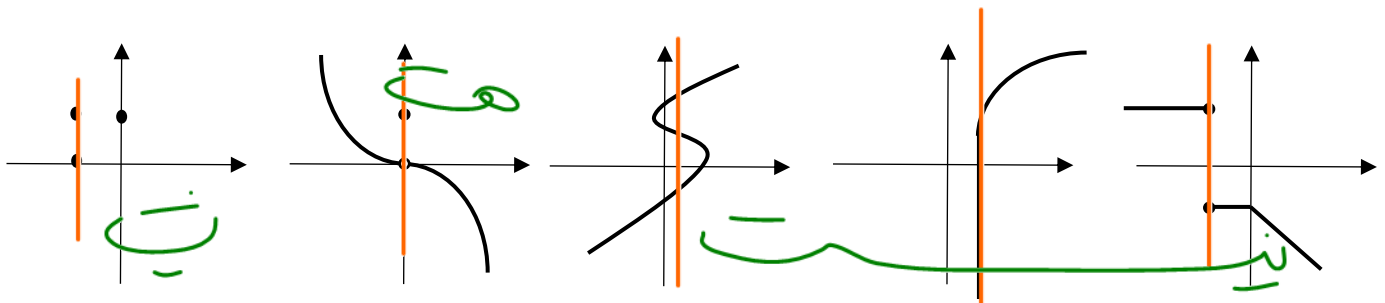
$$f = \{(-2, 4), (2, -7), (-1, 9), (0, 12)\}$$



$$f = \{(-8, 0), (9, 5), (9, 7)\}$$



$$f = \{(-8, 0), (9, 5), (9, 5)\}$$



▼ تمرین: اگر رابطه  $f$  بیانگر یک تابع باشد، مقادیر  $m$  و  $n$  را ده دست آورید.

$$f = \{(-1, 3), (2, 2m-1), (4, 3), (-1, n+1), (2, m-3)\}$$

$$\begin{aligned} n+1 &= 3 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

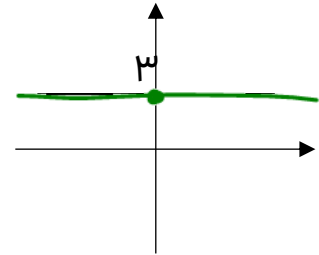
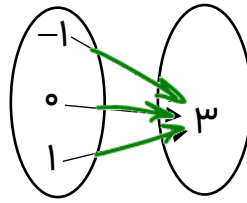
$$\begin{aligned} m-3 &= 2m-1 \\ -2 &= m \end{aligned}$$

♦ تابع ثابت:

برداشت عضو

مثال  $\rightarrow \begin{cases} f: D \rightarrow \{3\} \\ f(x) = 3 \end{cases}$

$f = \{ \dots, (-1, 3), (0, 3), (1, 3), \dots \}$



تمرین: اگر  $\{(0, 2), (-4, a), (2, 2a + b)\}$  یک تابع ثابت باشد. مقدار  $a$  و  $b$  کدام است؟

$a = 2$

$2a + b = 2$   
 $4 + b = 2 \rightarrow b = -2$

نکته: دقت کنید که طبق فرم کلی تابع ثابت نباید هیچ  $x$  ای در ضابطه وجود داشته باشد، اگر هم در سوالی ضابطه‌ای داشت  $x$  را ثابت معرفی کردن باید ضریب  $x$  رو صفر قرار بدین که از بین بره.

تمرین: اگر  $f(x) = (3k - 12)x + 2k$  تابعی ثابت باشد:

الف) مقدار  $k$  را مشخص کنید.  $3k - 12 = 0 \rightarrow k = 4$

ب) ضابطه تابع  $f$  را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

پ) حاصل  $f(-1)$  را بیابید.

$\Rightarrow f(x) = 2(4) = 8$

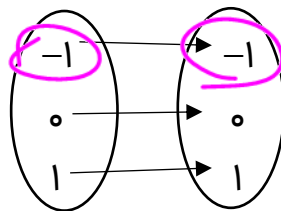
$f(-1) = 8$

همان ستنل رو تون میس

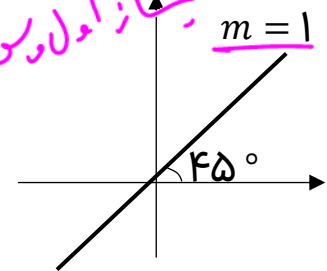
$\begin{cases} f: D \rightarrow R \\ f(x) = x \end{cases}$

دامنه و بردش یکسان

$f = \{ \dots, (-1, -1), (0, 0), (1, 1), \dots \}$



نیم‌ساز اول و دوم



نکته: در مورد تابع همانی بدانید همیشه:

$f(x) + f(-x) = 0$

$f(kx) = kf(x)$

تمرین: در مورد تابع همانی درستی یا نادرستی هریک از موارد زیر را مشخص کنید.

$f(x) = f(-x)$  (ب) ❌

$f(kx) = kf(x)$  (الف) ✓

ت) دامنه و بردش برابر است. ✓

پ) نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم است. ❌

نکته: توجه داشته باشید که در ضابطه تابع همانی هیچ عدد ثابتی نیست و ضریب  $x$  هم فقط باید عدد یک باشد.

تمرین: اگر  $f(x) = (n-3)x - m + 5$  تابع همانی باشد، حاصل  $f(m) + f(n)$  را بیابید.  
 $n-3=1 \rightarrow n=4$   
 $-m+5=0 \rightarrow m=5$

$$f(5) + f(4) = 5 + 4 = 9$$

$$x-4=3x-8$$

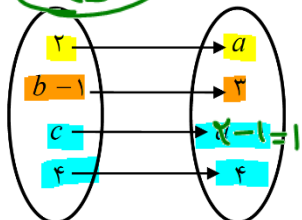
$$4=2x$$

$$x=2$$

تمرین: اگر دو زوج مرتب  $(3x-8, x^2+2y-5)$  و  $(x-4, 3)$  مساوی باشند مقدار  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$x^2+2y-5=3 \Rightarrow 2y-5=-1 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$$

تمرین: تابع زیر همانی است، مقدار  $c$  و  $b$  و  $a$  را بیابید.



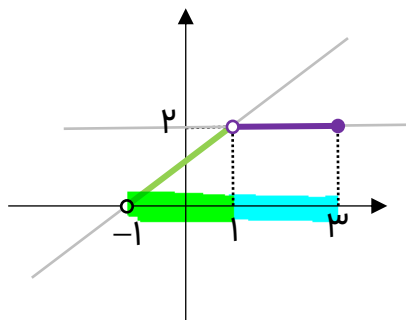
$$a=2$$

$$b-1=3 \rightarrow b=4$$

$$c=1$$

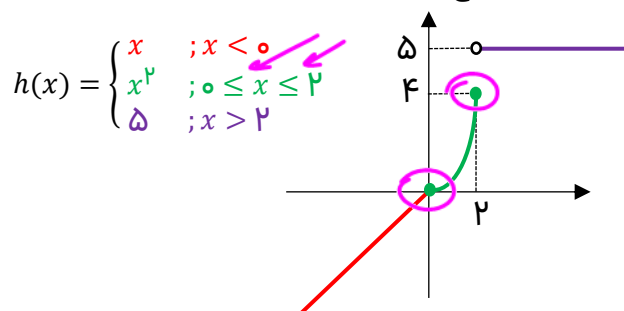
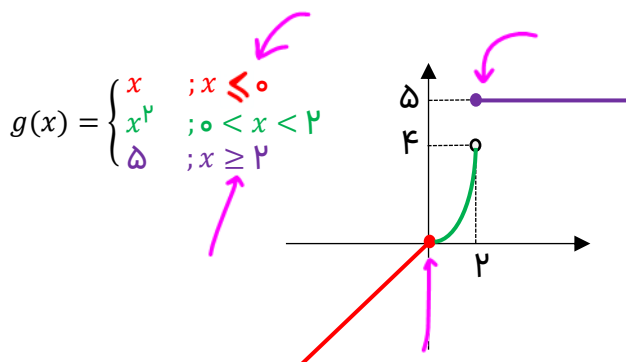
تابع چند ضابطه‌ای: تابعی است که از دو ضابطه یا بیشتر شکل گرفته که هرکدام دامنه خودش را دارد:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; -1 < x < 1 \\ 2 & ; 1 < x \leq 3 \end{cases}$$



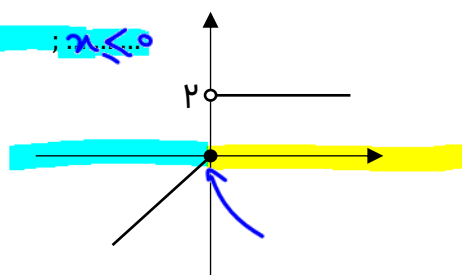
مثال: تابع هزینه پارکینگ، تابع مقدار مالیات بر حسب درآمد و ...

نکته: نقاطی از دامنه که قبل و بعد آن ضابطه تغییر می‌کند رو نقاط مرزی می‌گن. این که نقطه‌ی مرزی توی کدوم دامنه باشه رو تابع مشخص می‌کند.

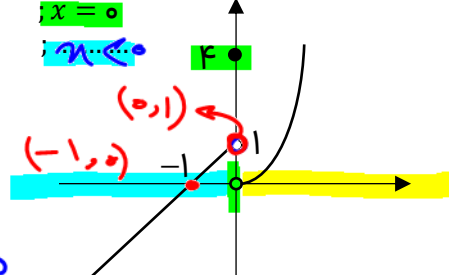


تمرین: با توجه به نمودار و ضابطه هر یک از موارد زیر جاهای خالی را تکمیل کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x > 0 \\ x & ; x \leq 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x > 0 \\ x+1 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

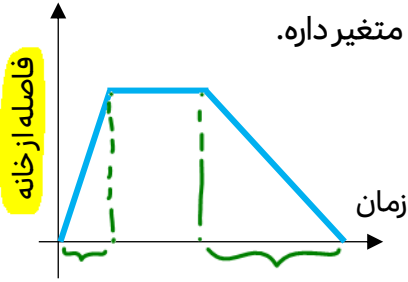


$$\frac{1-0}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(x) = ax+b$$

$$f(x) = 1x+1$$

$\{ \Sigma_0, \dots \}$



♦ کاربرد شیب در مسائل توصیفی: شیب ارتباط مستقیمی با سرعت تغییرات یک متغیر دارد.

▼ تمرین: نمودار زیر مربوط به کدام داستان است؟

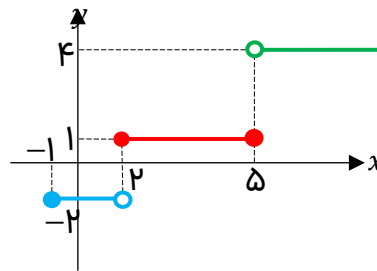
الف) امیر از خانه خارج شد و از تپهٔ روبروی خانه با سرعت کمی بالا رفت. بعد از توقف بالایی تپه از طرف دیگر با سرعت بیشتری پایین آمد و به خانه بازگشت.

ب) آوا به همراه دوستش از خانه خارج شدند و با سرعت به سمت پارک محله حرکت کردند. مدتی در پارک توقف کردند و سپس به آرامی بیستری به خانه برگشتند.

## فصل ۲- درس ۲ - توابع جزء صحیح و قدر مطلق

♦ تابع پلکانی: تابعی چندضابطه‌ای است که تمام ضوابط آن تابع ثابت هستند. مثلاً ضابطهٔ تابع  $f$  و نمودار آن را مشاهده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & ; -1 \leq x < 2 \\ 1 & ; 2 \leq x \leq 5 \\ 4 & ; x > 5 \end{cases}$$

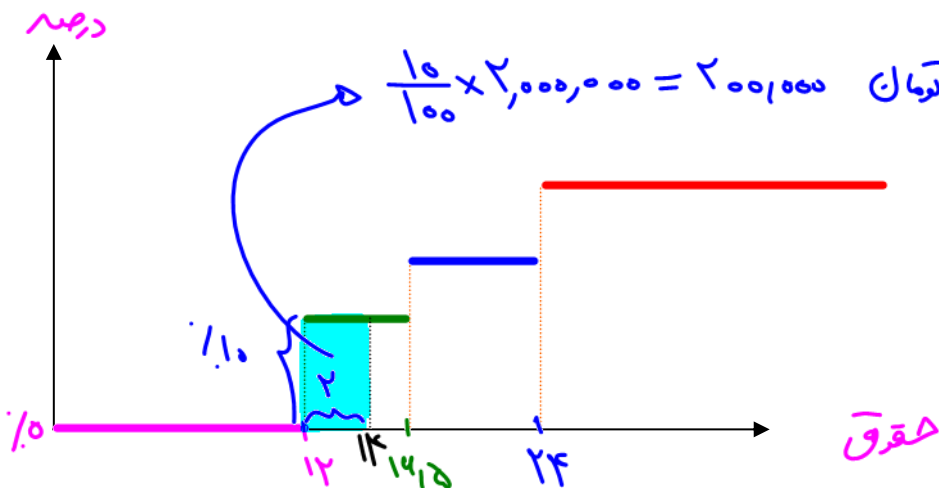


▼ تمرین: جدول مالیاتی زیر به صورت پلکانی تنظیم شده است. بر اساس جدول، مالیات حقوق را محاسبه کنید:

| نرخ مالیات (درصد) | حقوق ماهیانه (تومان)          |
|-------------------|-------------------------------|
| معاف از مالیات    | حقوق تا ۱۲۰۰۰۰۰۰              |
| ۱۰                | مازاد بر ۱۲۰۰۰۰۰۰ تا ۱۶۰۰۰۰۰۰ |
| ۱۵                | مازاد بر ۱۶۰۰۰۰۰۰ تا ۲۴۰۰۰۰۰۰ |
| ۲۰                | مازاد بر ۲۴۰۰۰۰۰۰             |

الف) کارمندی با حقوق ۱۴ میلیون تومان

ب) نمودار تابع پلکانی فوق را رسم کنید.



$$(12000000 - 0) \times \frac{0}{100} = 0$$

$$(14000000 - 12000000) \times \frac{10}{100}$$

$$2000000 \times \frac{10}{100} = 200000$$

$$0 + 200000 = 200000$$

تومان

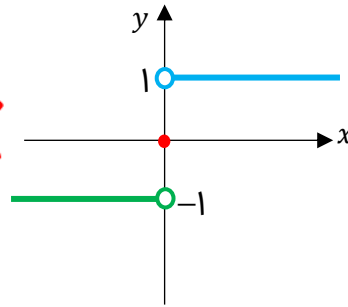
♦ تابع علامت (ساین):

نوعی تابع پله‌ای معروف است که از دو نیم خط به صورت زیر تشکیل شده است:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = \{1, 0, -1\}$$



▼ تمرین: مقادیر زیر را بیابید.

$$\text{sign}(\sqrt{2}) = 1$$

$$\text{sign}(0) = 0$$

$$\text{sign}(2 - \sqrt{5}) = -1$$

منفی

$$\text{sign}(-300) = -1$$

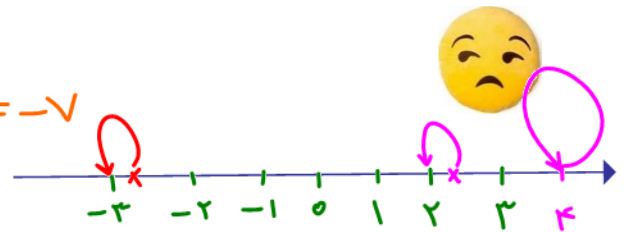
♦ بررسی مفهوم جزء صحیح  $[x]$ :

۱) اعداد مثبت  $[2, 3] = 2$

۲) اعداد صحیح  $[4] = 4$  همان

۳) اعداد منفی  $[-2, -1] = -3$

$$[-7] = -7$$



▼ تمرین: طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$[0/5] = 0$$

$$[1/7] = 1$$

$$[-0/0] = 0$$

$$[-1] = -1$$

$$[7-3] = [4] = 4$$

$$[1-\sqrt{5}] = [-1, -2] = -2$$

$$[-0/0] = 0$$

$$3[\sqrt{2}] = 3(1) = 3$$

♦ نمایش ریاضی جزء صحیح: در این نمایش  $k$  حتماً باید عددی صحیح باشد:  $k \leq x < k+1 \Leftrightarrow [x] = k$

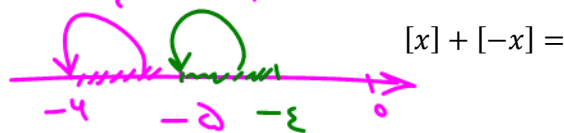
$$-6 \leq x < -5 \Rightarrow [x] = -6$$

یا

$$[x] = 7 \Rightarrow 7 \leq x < 8$$

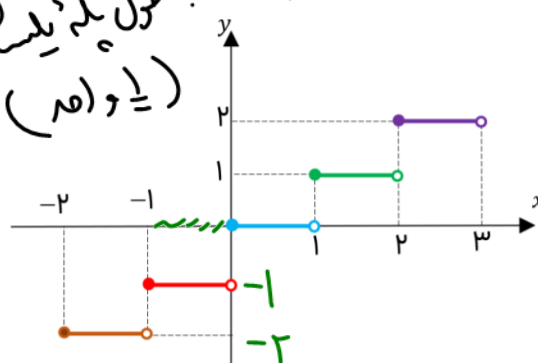
✓ نکته خیلی مهم:

♦ تابع جزء صحیح:



$$y = [x] = \begin{cases} -2 & ; -2 \leq x < -1 \\ -1 & ; -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; 1 \leq x < 2 \\ 2 & ; 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

پله‌ای با طول پله یک (یک واحد)



▼ تمرین: اگر  $f(x) = 2x + 3[x]$ ، حاصل عبارت  $f(0/5) + 2f(2/5)$  را بیابید.

$$f(0/5) = 2(0/5) + 3[0/5] = 0 + 3(0) = 0$$

$$1 + 2(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2/5) = 2(2/5) + 3[2/5] = 4 + 6 = 10$$

♦ یادآوری مفهوم قدرمطلق  $|x|$ :

همانی

$$|4| = 4$$

$$|-4| = -(-4) = 4$$

قرینه

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2})$$

متنی

$$|\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1$$

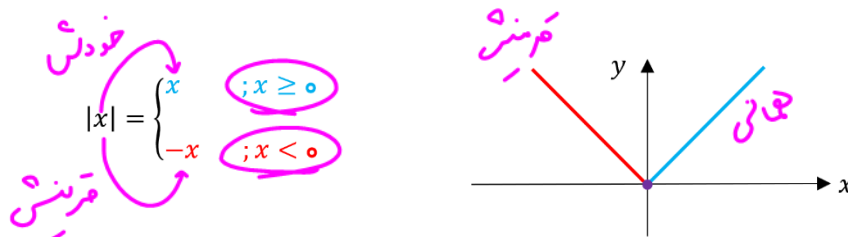
مثبت

♦ مفهوم دو ضابطه‌ای قدرمطلق:

$$y = |x - 7| = \begin{cases} x - 7 & x \geq 7 \\ -(x - 7) & x < 7 \end{cases}$$

$x=7$

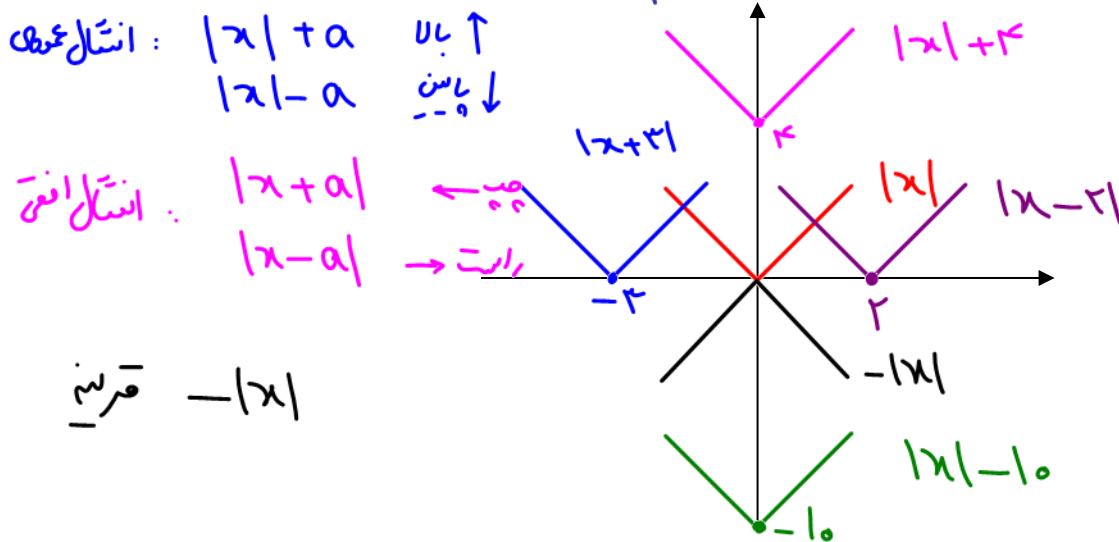
♦ تابع قدرمطلق:



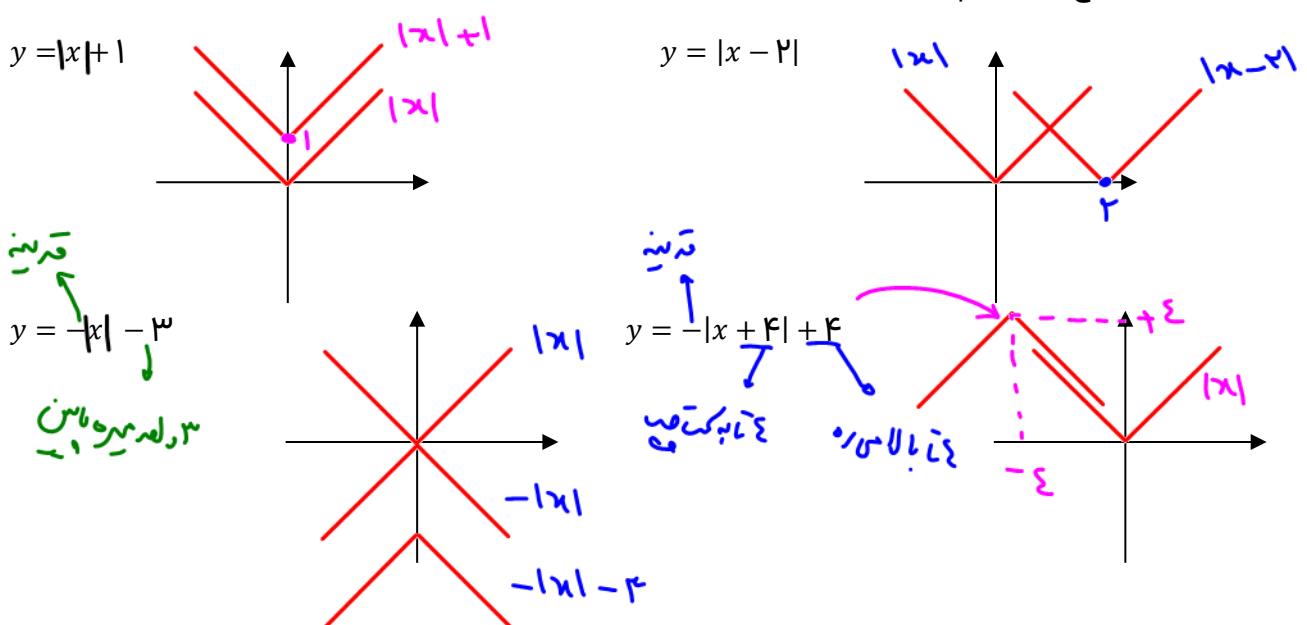
تمرین: اگر  $f(x) = |3x - 1|$  باشد، مقدار  $f(1 + \sqrt{2})$  را محاسبه کنید.

$$f(1 + \sqrt{2}) = |3(1 + \sqrt{2}) - 1| = |3 + 3\sqrt{2} - 1| = |2 + 3\sqrt{2}| = 2 + 3\sqrt{2}$$

♦ انتقال توابع:



تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.



## آزمون شبیه‌ساز ترم اول

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                          |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| ۱ | جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.<br>(الف) در تابع همانی دامنه و برد با هم ..... هستند.<br>(ب) ترکیب فصلی یک گزاره‌ی درست با گزاره‌ای دلخواه همواره دارای ارزش ..... است.<br>(پ) تعداد ردیف‌های جدول ارزشی ۳ گزاره ..... است.<br>(ت) وقتی که ارزش گزاره مقدم در یک ترکیب شرطی نادرست باشد، ارزش کل ترکیب ..... است.                         | ۰/۵<br>۰/۵<br>۰/۵<br>۰/۵ |
| ۲ | درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.<br>(الف) تابع ثابت به ازای هر مقدار مستقل یک مقدار وابسته دارد.<br>(ب) در صورت درست بودن ارزش تالی در گزاره شرطی، ارزش کل شرط نادرست است.<br>(پ) ترکیب دوشروطی دو گزاره زمانی درست است که ارزش دو گزاره یکسان باشد.<br>(ت) در یک تابع همانی با دامنه دلخواه مقدار $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است. | ۰/۵<br>۰/۵<br>۰/۵<br>۰/۵ |
| ۳ | کدام یک از موارد زیر یک گزاره است؟ در صورت گزاره بودن ارزش آن را مشخص کنید.<br>(الف) آخرین روز هفته پنجشنبه است. هست - نادرست<br>(پ) امسال تابستان خیلی خوبی خواهد بود! نیست                                                                                                                                                                     | ۰/۲۵<br>۰/۲۵             |
| ۴ | ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.<br>(الف) ۲۹ زوج یا اول است. درست<br>(ب) اگر ۳۶ مضرب ۶ است آنگاه ۱ عددی اول است. $T \Rightarrow F \equiv F$<br>(ت) ۰/۲۵ عددی طبیعی است و $3 - x = x - 3$ $T \vee F \equiv T$<br>(پ) اگر و تنها اگر $3 < 4$ $F \Leftrightarrow T \equiv F$                                                                       | ۱<br>۱                   |
| ۵ | نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.<br>(الف) عدد $a$ مثبت است. $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$<br>(پ) ۲۵ مربع کامل است و $1/4$ عددی طبیعی است. $3 \notin \mathbb{Z}$<br>(ت) .....                                                                                                                                                                  | ۰/۵<br>۱                 |
| ۶ | اگر $p$ گزاره‌ای درست و $q$ گزاره‌ای نادرست و $r$ گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از موارد زیر را مشخص کنید.<br>(الف) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$<br>(ب) $(p \vee r) \Leftrightarrow p$                                                                                                                                              | ۲                        |
| ۷ | با استفاده از جدول، درستی هم‌ارزی زیر را بررسی کنید.<br>$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$                                                                                                                                                                                                                                       | ۱/۵                      |
| ۸ | گزاره‌های فارسی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.<br>(الف) دو برابر مجذور عددی برابر نصف آن عدد است.<br>(ب) مجموع معکوس‌های دو عدد مثبت بزرگتر یا مساوی ۳ است.                                                                                                                                                                                       | ۱<br>۱                   |

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3; x > 0, y > 0$$

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۹  | استدلال‌های زیر دارای خطا می‌باشند، برای هر کدام مشخص کنید در کدام مرحله خطا رخ داده است؟ چرا؟<br><div> <div> <math>\frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5-2 = 3</math> (الف) </div> <div> <math>x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x} \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1</math> (ب) </div> </div> <p>وقتی بین جمع یا تفریق است نمی‌توان ساده‌سازی کرد</p> <p>نمی‌توان بر مخرجول ساده کرد</p> |
| ۱۰ | استدلال روبرو را در نظر بگیرید:<br>مقدمه ۱: اگر $x$ منفی باشد، مربع $x$ مثبت است.<br>مقدمه ۲: $x = -2$<br>نتیجه: $(-2)^2$ مثبت است<br>.....<br>..<br>(الف) جای خالی را در این استدلال پر کنید.<br>(ب) نام این استدلال را بنویسید<br>(پ) ارزش این استدلال را مشخص کنید.                                                                                                                                                             |
| ۱۱ | اگر تابع $f = \{(4, x-2y), (10, 2), (5, 2x)\}$ تابع ثابت باشد مقادیر $x$ و $y$ را بدست آورید.<br>$2x = 2 \rightarrow x = 1$<br>$1 - 2y = 2 \rightarrow -2y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$                                                                                                                                                                                                                                       |
| ۱۲ | اگر تابع $f(x) = \frac{(a-2)x + b - 3}{2}$ یک تابع همانی باشد، مقدار $a + b$ را به دست آورید.<br>$2+2=4$<br>$a-2=1 \rightarrow a=3$<br>$b-3=0 \rightarrow b=3$                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| ۱۳ | در تابع زیر مقدار $f(-2)$ و $f(5)$ را محاسبه کنید.<br>$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & ; x > 0 \\ x^2-4 & ; x \leq 0 \end{cases}$<br>$f(5) = 2(5) - 3 = 7$<br>$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                 |
| ۱۴ | نمودار تابع زیر را رسم کنید.<br>$f(x) = \begin{cases} x & ; x > 1 \\ -2 & ; -1 < x \leq 1 \\ x-1 & ; x \leq -1 \end{cases}$<br>                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |