

درجه دو

معادلات دو مجذوری: معادلاتی به صورت $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$$\dots \Rightarrow \alpha = \dots \Rightarrow \dots$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

روابط بین ریشه ها:

$$\alpha \quad \beta$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

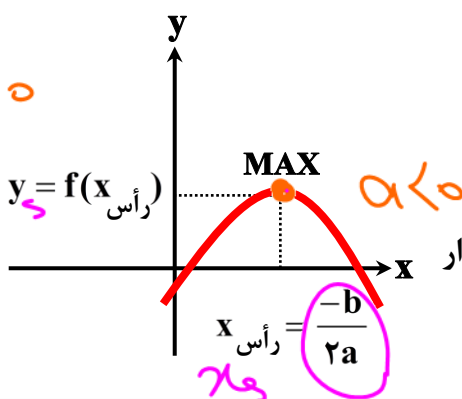
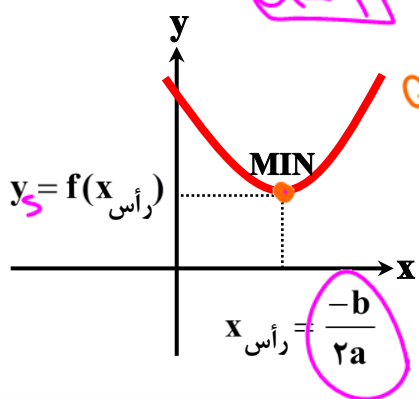
نوشتن معادله درجه دو به کمک ریشه ها: $a(x^2 - Sx + P) = 0$

نمودار تابع درجه دو:

*محور تقارن

*میانگین ریشه ها

*محل بیشترین یا کمترین مقدار



در فرم بسته عبارت درجه دو به صورت $a(x - \alpha)^2 + \beta$ ، رأس سهمی نقطه (α, β) است

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$5x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ t = -\frac{1}{5} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

$$(x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) - 5 = 0$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 - 4x = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ t = 5 \Rightarrow x^2 - 4x = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1, 5 \end{cases}$$



۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\alpha + \beta \leq \alpha \beta$$

$$S = 8 \quad P = 4$$

$$\bullet \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{S}{P} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\bullet \alpha^2 + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 64 - 8 = 56$$

$$\bullet \alpha^3 + \beta^3$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 512 - 3 \times 4 \times 8 = 400$$

$$\bullet \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$$

$$\alpha\beta(\beta + \alpha) = P \cdot S = 4 \times 8 = 32$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن:

$$\bullet 11, -5$$

$$S = 6 \quad P = -55 \Rightarrow x^2 - 6x - 55 = 0 \quad x^2 - 4x - 55 = 0$$

$$\bullet 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}$$

$$S = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$



۴- تعیین کنید کدامیک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدامیک مینیمم؟ سپس ماکزیمم و مینیمم هریک را تعیین کنید.

• $f(x) = x^2 + 8x - 1$ $a > 0$ $\cup$ Min
 $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2} = -4$
 $y_s = 14 - 32 - 1 = -19$ (محدوده: $[-19, \infty)$)

• $g(x) = -4x^2 + 10x + 3$ $a < 0$ $\cap$ Max
 $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4}$ $(-\infty, \frac{5}{4}]$
 $y_s = -4(\frac{25}{16}) + 10(\frac{5}{4}) + 3 = \frac{25}{4} + \frac{15}{2} + \frac{12}{4} = \frac{57}{4}$

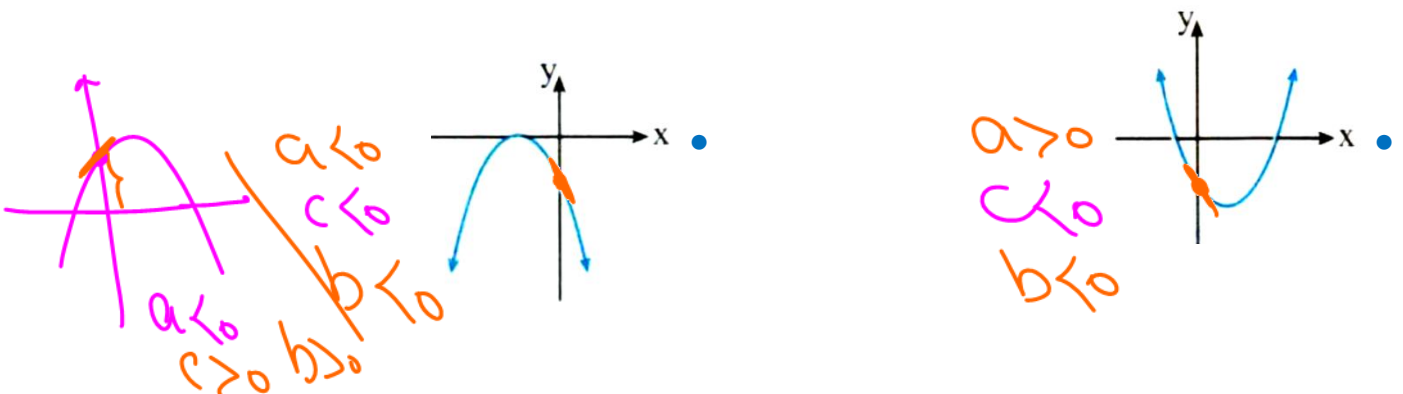
۵- قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)
 $2a + b = 120 \Rightarrow b = 120 - 2a$
 $S = ab \Rightarrow S = a(120 - 2a) \Rightarrow S = 120a - 2a^2$
 $a = \frac{120}{2} = 60, b = 0$
 $S_{max} = 60 \times 0 = 0$

۶- استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم با فرض ۲۱۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود.

$2a + 2\pi r = 2100 \Rightarrow a + \pi r = 1050$
 $S = 2ra \Rightarrow S = 2r(1050 - \pi r) \Rightarrow S = 2100r - 2\pi r^2$
 $r = \frac{2100}{2\pi} = \frac{1050}{\pi}$ $a = 1050 - \pi r$

۷- در هریک از قسمت‌های زیر، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. علامت ضرایب a, b, c را مشخص کنید.





۸- اگر $x = -1$ یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 = (m+1)x + m^2 + 1$ باشد، مقدار m و ریشه دیگر را بیابید.

$$2 = -(m+1) + m^2 + 1$$

$$2 = -m - 1 + m^2 + 1 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \quad \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$m = -1: 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$m = 2: 2x^2 = 3x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \begin{cases} -1 \\ 5/2 \end{cases}$$

۹- نشان دهید $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ است، سپس ریشه‌های دیگر معادله را بیابید.

$$\underline{x=2} \rightarrow 8 + 8 - 10 - 6 = 0$$

$$x=2 \rightarrow x-2=0$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \quad | \quad x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 4x^2 - 5x - 6 \\ \underline{- 4x^2 + 8x} \\ 13x - 6 \\ \underline{- 13x + 26} \\ 20 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$





معادلات گویا و گنگ

۱۰- هریک از معادلت زیر را حل کنید.

$$\bullet \left(\frac{5}{x} - \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x-2} \right) \xrightarrow{x \neq 0, x \neq 2} x(x-2) \left(\frac{5}{x} - \frac{2}{x(x-2)} \right) = x(x-2) \left(\frac{x-2}{x-2} \right)$$

$$x^2 - 2x = 5x - 12$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x-6) = 0 \quad \begin{cases} x=2 \text{ قی } \\ x=6 \text{ قی } \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{2x+15} - \sqrt{x+6} = 2 \xrightarrow{2-2=0} \sqrt{2x+15} = (\sqrt{x+6} + 2)^2$$

$$2x+15 = x+6+4 + 2\sqrt{x+6}$$

$$x+9 = 2\sqrt{x+6}$$

$$x^2 + 18x + 81 = 4(x+6) \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0 \rightarrow (x-15)(x+1) = 0$$

۱۱- علی و رضا ویرایش یک مجله‌ی ادبی را انجام می‌دهند. اگر رضا به تنهایی این کار را انجام دهد، ۶ ساعت و اگر دو نفر با هم انجام دهند، ۴ ساعت زمان نیاز است. علی به تنهایی در چند ساعت ویرایش مجله را انجام می‌دهد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_A}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{t_A} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{t_A} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2}{24} - \frac{3}{24} = -\frac{1}{12}$$

$$t_A = 12$$



قدر مطلق

$$|O| = \begin{cases} O & ; O \geq 0 \\ -O & ; O < 0 \end{cases}$$

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & ; -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

۱۲- مجموعه جواب معادلات زیر را بیابید.

• $|x+1| = 4$

$$\begin{cases} x+1=4 \rightarrow x=3 \\ x+1=-4 \rightarrow x=-5 \end{cases}$$

• $\frac{|1-x|}{x+2} = 2$

$$\frac{|1-x|}{x+2} = 2 \rightarrow |1-x| = 2x+4$$

$$\begin{cases} x-1=2x+4 & x \geq 1 \\ x=-5 & \text{X} \\ 1-x=2x+4 & x < 1 \\ x=-1 & \checkmark \end{cases}$$

• $x + \frac{x}{|x|} = 3$

$$\begin{cases} x + \frac{x}{x} & x > 0 \\ x + \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=3 & x > 0 \\ x=2 & \\ x-1=3 & x < 0 \\ x=4 & \text{X} \end{cases}$$

۱۳- جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را بیابید.

• $|2x-1| < 1$

$$\frac{1-x}{1+x}$$

$$2x-1 < 1 \quad x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1$$

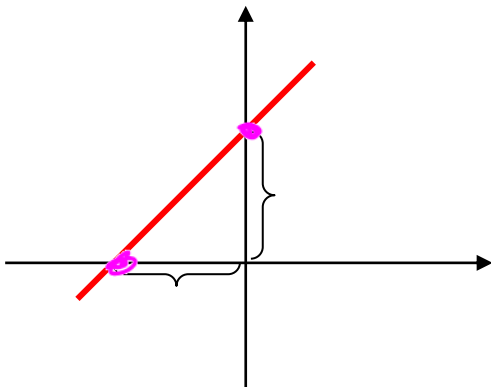
$$1-2x < 1 \quad x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$$

• $x+1 < |x|$

$$|2x-1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < 2x < 2 \Rightarrow 0 < x < 1$$

هندسه تحلیلی

خط:



(۱) معادله خط $y - y_0 = m(x - x_0)$

(۲) شیب خط $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(۳) عرض از مبدأ $x=0$
(۴) طول از مبدأ $y=0$ (نقطه)

فواصل معروف:

مختصات مرکز	دو خط موازی	نقطه از خط	نقطه از نقطه
$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$	$\frac{ c - c' }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ضرایب x و y هر دو خط یکسان شود	$\frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ خط ضمنی شود $ax + by + c = 0$	$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

۱۴- مربع ABCD که A(۴,۱) و B(۶,۲) دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است. (مشابه تمرین کتاب درسی)

• شیب ضلع AB را بیابید و معادله آن را بنویسید.

$$m_{AB} = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + b$$

$$(4,1) \rightarrow 1 = 2 + b \rightarrow b = -1$$

• شیب ضلع BC را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

$$m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -2$$

$$B(6,2)$$

$$y = -2x + b$$

$$2 = -12 + b \rightarrow b = 14$$

• اگر D(-۱,۱۱) یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.

$$x: x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 4 + x = 6 + 1 \rightarrow x = 1$$

$$y: y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 1 + y = 2 + 11 \rightarrow y = 12$$

۱۵- نقاط $(2,0)$ و $(4,2)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادله قطره‌های این مربع را بنویسید.

$m_{AB} = \frac{2-0}{4-2} = 1 \Rightarrow y = x + b$
 $0 = 4b - b = -2$
 $m_{DC} = \frac{-1}{m_{AB}} = -1$ $M(2,1)$ $y = -x + b$
 $1 = -2 + b$
 $b = 3$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۶- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(1,-3)$ و $B(5,-1)$ هستند.

• اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

$O(3,-2)$
 $B(5,-1)$
 $OB = r = \sqrt{2+1} = \sqrt{5}$

• آیا نقطه $(0,2)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

$d > r$ $OC = d = \sqrt{9+14} = 5$ $d > r$
 خارج دایره

۱۷- یکی از اضلاع مربع روی خط به معادله $2x = y - 3$ واقع است. اگر نقطه $(3,1)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مساحت آن را به دست آورید.

$y - 2x - 3 = 0$
 $a = \frac{|1-2-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow S = a^2 = \frac{1}{5}$

۱۸- دو ضلع یک مربعی منطبق بر دو خط $2x - y = 11$ و $4x - 2y = 5$ است. مساحت مربع کدام است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$2x - y - 11 = 0$
 $4x - 2y - 5 = 0$
 $a = \frac{|11-22|}{\sqrt{4+1}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$
 $S = a^2 = \frac{121}{5}$

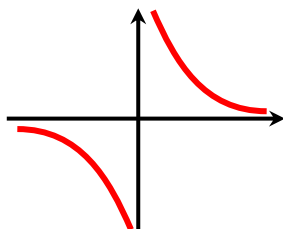
انواع توابع

دامنه

$Q(x) \neq 0$

تابع گویا: توابعی به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ در آن تابع چند جمله ای هستند و

نمودار تابع $\frac{1}{x}$:

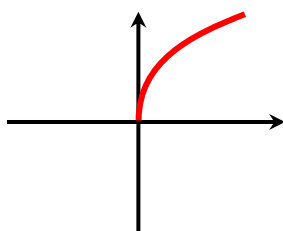


دامنه

$P(x) \geq 0$

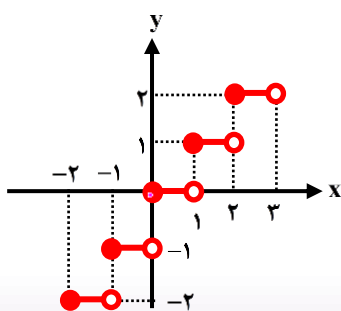
تابع رادیکالی: توابعی به فرم $\sqrt{P(x)}$ که

نمودار تابع $\sqrt{x}$:



تابع پراکتی:

نمودار تابع $[x]$:



$$[x] = k \quad \text{for } k \leq x < k+1$$

$$[1, 2] = 1$$

$$[-2, -1] = -2$$

۱۹- تابع بودن یا نبودن هر یک از ضابطه‌های زیر را تعیین کنید.

• $y = x^2$

$$x_1 = x_2 \rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 = y_1 = y_2$$

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

• $y^2 = x \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$

$$x_1 = x_2$$

$$\sqrt{x_1} = \pm\sqrt{x_2} \rightarrow y_1 = \pm y_2$$

• $|y| = x + 1 \rightarrow y = x + 1$
 $y = -x - 1$

$$x_1 = x_2 \rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \rightarrow y_1 = y_2$$

$$x_1 + 1 = -x_2 - 1 \rightarrow y_1 = -y_2$$



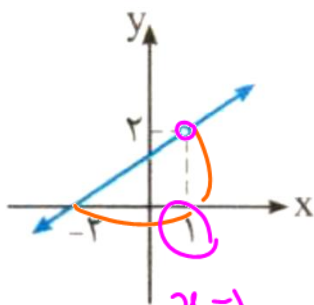
۲۰- دامنه تابع $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+ax+b}$ ، مجموعه $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ می باشد. a, b را به دست آورید.

* ضابطه تابع گویایی بنویسید که دامنه آن، $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ باشد.

$$S = 3$$

$$P = -10 \Rightarrow x^2 - Sx + P = x^2 - 3x - 10$$

۲۱- نمودار یک تابع گویا داده شده است. ضابطه آن را بنویسید.



$$m = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

$$0 = -\frac{2}{3} + b \Rightarrow b = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{2x+2}{3(x-1)}$$

$$x=1$$

$$(x-1)=0$$

۲۲- در هریک از قسمت های زیر مشخص کنید دو تابع داده شده با هم برابر هستند یا خیر. (مشابه تمرین کتاب درسی)

• $g(x) = x-1, f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ $\times$

$D_g = \mathbb{R}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

۱) برابری دامنه (قبل از ساده کردن)

۲) برابری ضابطه

• $g(x) = \frac{x}{|x|}, f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $\times$

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

• $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+1}, f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\checkmark$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$g(x) = \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$$

۲۳- مقادیر a, b را طوری به دست آورید که دو تابع داده شده با هم برابر باشند.

$g(x) = x+2, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ ax-1 & x = 2 \end{cases}$

$D_g = \mathbb{R}$ $D_f = \mathbb{R}$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2a - 1 = 4$$

$$a = \frac{5}{2}$$



(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$\bullet \left[-\frac{4}{5}\right] = -1$$

$$\bullet \left[\sqrt{26}\right] = 5$$

$$\bullet \left[\sqrt[3]{40}\right] = 3$$

$$\bullet \left[-3\sqrt{5}\right] = \left[-6\right] = -7$$

۲۴- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۵- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\bullet \left[\frac{x+1}{2}\right] = -1$$

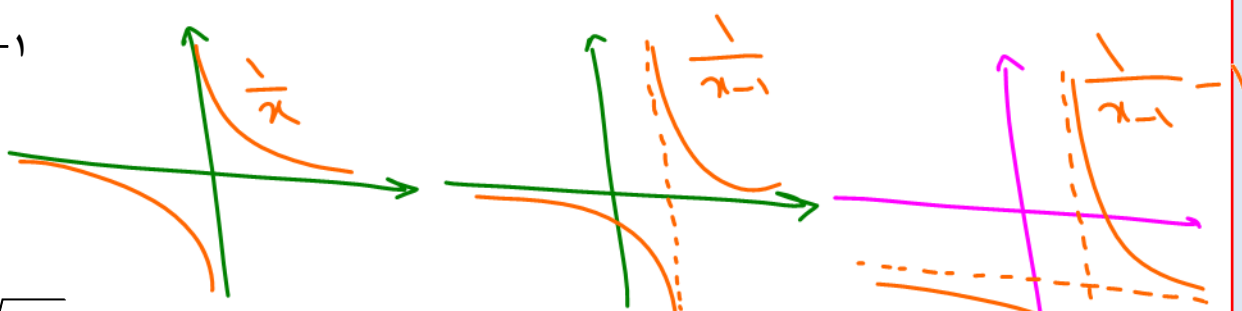
$$-1 \leq \frac{x+1}{2} < 0 \rightarrow -2 \leq x+1 < 0$$

$$-3 \leq x < -1$$

$$[0] = k \rightarrow k \leq 0 < k+1$$

۲۶- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

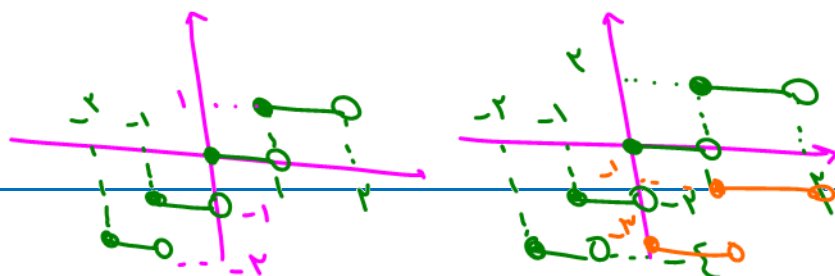
$$\bullet y = \frac{1}{x-1} - 1$$



$$\bullet y = -1 + \sqrt{x+1}$$



$$\bullet y = 2[x] - 3; x \in [-2, 2)$$

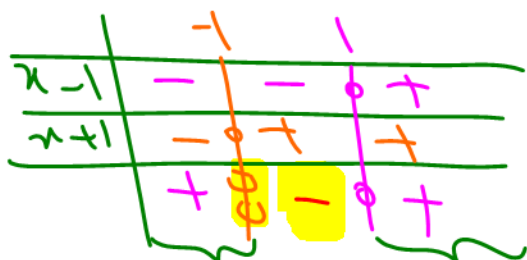


۲۷- دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$$\bullet f(x) = \frac{x}{x^2 + 6x - 7}$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \rightarrow x = -7, 1 \quad \mathbb{R} - \{-7, 1\}$$

$$\bullet k(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \geq 0$$

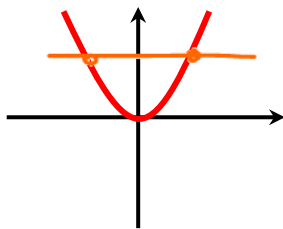
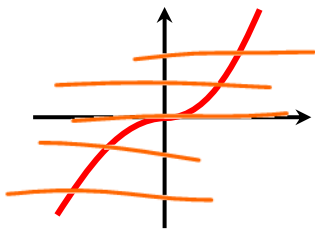


$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\mathbb{R} - (-1, 1)$$

وارون تابع و تابع یک به یک

به تابعی که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک میگوییم.



برای بررسی یک به یک بودن از

روی نمودار اگر خط های افقی رسم کنیم

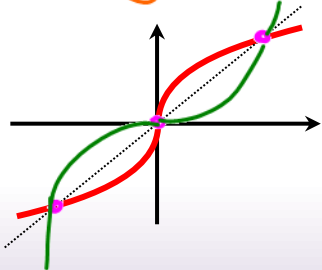
باید نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند

$$f(x) = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\} \quad \text{X}$$

وارون تابع: حاصل عوض شدن جای ورودی و خروجی تابع است

$$f(x) = \{(1, 2), (2, 5), (4, 4), (7, 3)\} \longrightarrow f^{-1}(x) = \{(2, 1), (5, 2), (4, 4), (3, 7)\}$$

نست به خط $y=x$ تقریبی



۲۸- در تابع $f = \{(-2, a+b), (a-2b, 5), (6, 1), (-2, 4), (1, 5)\}$ مقادیر b, a را طوری به دست آورید که تابع داده

شده، تابعی یک به یک باشد.

$$\begin{aligned} a+b &= 2 \longrightarrow a+1=2 \longrightarrow a=1 \\ -a+2b &= -1 \\ \hline 3b &= 3 \longrightarrow b=1 \end{aligned}$$

۲۹- وارون پذیری توابع زیر را ثابت کنید و ضابطه تابع وارون را برای توابع وارون پذیر بیابید.

$$\bullet y = \frac{1}{2} - 2x \longrightarrow 2x = \frac{1}{2} - y \longrightarrow x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y$$

$$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x$$





• $y = (1 - 2x)^2$

$$\sqrt[3]{y} = 1 - 2x \quad 2x = 1 - \sqrt[3]{y} \rightarrow x = \frac{1 - \sqrt[3]{y}}{2} \rightarrow y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{2}$$

• $y = \frac{2x+1}{x-2}$

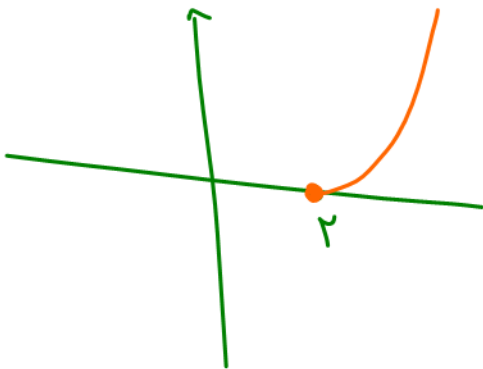
$$xy - 2y = 2x + 1 \rightarrow xy - 2x = 2y + 1$$

$$x(y-2) = 2y+1 \rightarrow x = \frac{2y+1}{y-2} \rightarrow y = \frac{2x+1}{x-2}$$

• $y = (x-2)^2$



• $y = (x-2)^2 \quad x \in [2, +\infty)$



$$y = (x-2)^2$$

$$\sqrt{y} = |x-2| \xrightarrow{x \geq 2} \sqrt{y} = x-2$$

$$\sqrt{y} + 2 = x \rightarrow y = \sqrt{x} + 2$$





اعمال جبری روی توابع

کافیست x های مشترک را برداشته و روی y ها عمل جبری خواسته شده را انجام دهیم

در حالت تقسیم $\frac{f}{g}$ علاوه بر دامنه مشترک دو تابع f و g باید حواسمان به دامنه کسر جدید هم باشد $g \neq 0$

۳۰- اگر $f = \{(-1, 1), (2, 4), (3, 1), (4, 0)\}$ و $g = \{(2, -1), (5, 3), (2, 2), (-1, 6)\}$ دو تابع باشند، هریک از توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

$$D_f \cap D_g = \{2, -1\}$$

• $f + g$

$$= \{(2, 3), (1, 2), (-1, 7)\}$$

• $\frac{g}{f} \neq 0$

$$= \{(2, -\frac{1}{4}), (-1, \frac{1}{6})\}$$

• $f \circ g$

$$= \{(2, 1), (5, 1), (4, 2)\}$$



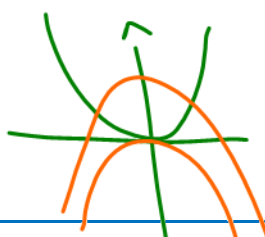
۳۱- توابع $f(x) = 3 - x^2$ و $g(x) = -2$ داده شده است.

• مقدار $(f \cdot g)(0)$ را محاسبه نمایید.

$$f(0) \cdot g(0) = 3 \times -2 = -6$$

• نمودار تابع $f + g$ را رسم کنید.

$$f + g = 3 - x^2 - 2 = 1 - x^2$$



۳۲- $f(x) = \sqrt{x+7}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند، مطلوب است:

• محاسبه مقدار $(g + 2f)(2)$

$$g(2) + 2f(2) = 3 + 2(3) = 9$$

$$D_f = [-7, +\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = [-7, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = [-7, +\infty)$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1$$



ترکیب توابع

$$x \rightarrow [g] \xrightarrow{z} [f] \rightarrow y = f(g(x))$$

۱) ورودی g

۲) ورودی...

۱) خروجی g

۲) ورودی f

۱) خروجی f

۲) خروجی...

$$f \circ g(x)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ و $g(x) = 2x-1$ باشد مطلوب است $f \circ g(x)$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-5} \xrightarrow{g(x)=2x-1} f(g(x)) = \frac{(2x-1)+1}{(2x-1)-5} = \frac{2x}{2x-6} = \frac{x}{x-3}$$

اگر $f(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g(x) = 2x-1$ باشد مطلوب است $f(x)$:

$$f(2x-1) = \frac{2x-1}{2x-1-3} = \frac{2x-1}{2x-4} = \frac{2x-1}{2(x-2)} = \frac{2x-1}{2x-4}$$

اگر $f(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g(x) = 2x-1$ باشد مطلوب است $f(x)$:

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{f(x)=\frac{x+1}{x-5}} \frac{g(x)+1}{g(x)-5} = \frac{x}{x-3} \rightarrow xg(x) - 5x = xg(x) - 2g(x) + x - 3$$

$$2g(x) = 6x - 3 \rightarrow g(x) = 2x - 1$$



۳۳- اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ ، دامنه و ضابطه fog را بیابید.

$$D_g = x \geq 3$$

$$x \neq 1$$

$$f(g(x))$$

$$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = [3, +\infty) - \{1\}$$

$$① x \geq 3$$

$$② g(x) \neq 1 \rightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \rightarrow x-3 \neq 1 \rightarrow x \neq 4$$

$$x \neq 4$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{\sqrt{x-3}-1} \Rightarrow f \circ g(x) = 1$$

۳۴- اگر $f(x) = 3x - a$ ، $g(x) = ax + 3b$ باشد، a, b را طوری بیابید که $(f \circ g)(x) = 3x - 10$ گردد.

$$f(g(x)) = 3g(x) - a = 3(ax + 3b) - a = 3ax + 9b - a$$

$$\begin{cases} 3a = 3 \rightarrow a = 1 \\ 9b - a = -10 \rightarrow 9b - 1 = -10 \rightarrow 9b = -9 \rightarrow b = -1 \end{cases}$$

۳۵- اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، دامنه و ضابطه fof را بیابید.

$$f(f(x)) = \sqrt{f(x)-1} = \sqrt{\sqrt{x-1}-1}$$

$$D_f: x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$x \in D_f \mid f(x) \in D_f$$

$$\Rightarrow [2, +\infty)$$

$$① x \geq 1$$

$$② f(x) \geq 1 \rightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \rightarrow x-1 \geq 1 \rightarrow x \geq 2$$

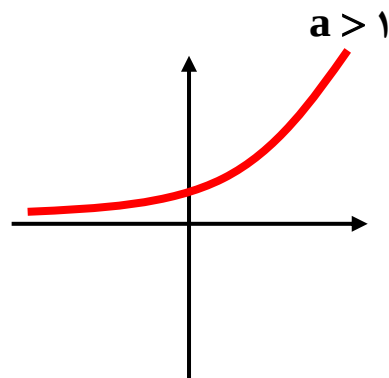
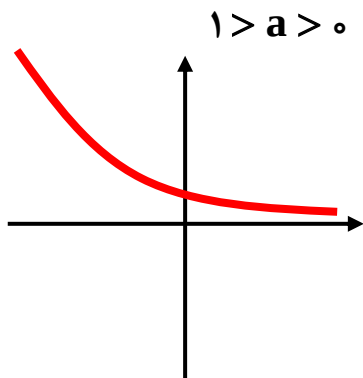


تابع نمایی

تابع نمایی به فرم زیر تعریف میشود:

$$f(x) = a^x : a > 0, a \neq 1$$

$$2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$$



$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$$

معادله نمایی:

اگر کسری بود: توان منفی

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = 2^{-1}$$

اگر رادیکالی بود: توان کسری

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۶- در تابع با ضابطه $f(x) = -4 \times 3^x + 1$

• مقدار $f(1)$ را به دست آورید.

$$-4 \times 3^1 + 1 = -11$$

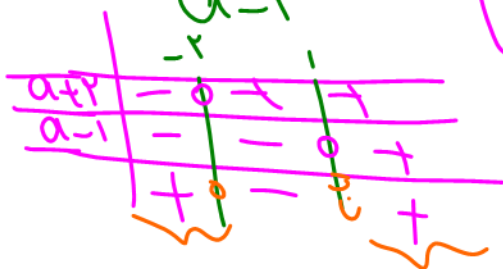
• اگر $f(x) = -35$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

$$\begin{aligned} -4 \times 3^x + 1 &= -35 \\ -4 \times 3^x &= -36 \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

۳۷- حدود a را چنان تعیین کنید که تابع f با ضابطه $f(x) = \left(\frac{a+2}{a-1}\right)^x$ یک تابع نمایی باشد.

$$\frac{a+2}{a-1} > 0$$

$$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$



*تابع نمایی صعودی؟

$$\frac{a+2}{a-1} = 1 \rightarrow a+2 = a-1 \rightarrow 2 = -1$$

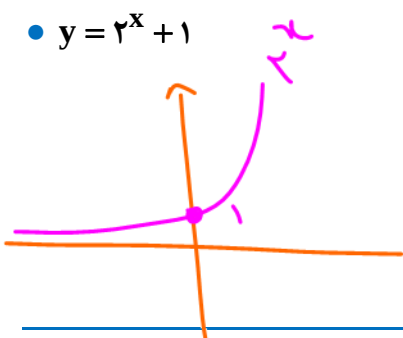
$$\frac{a+2}{a-1} > 1$$



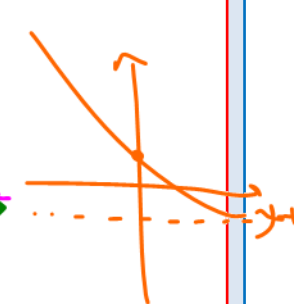
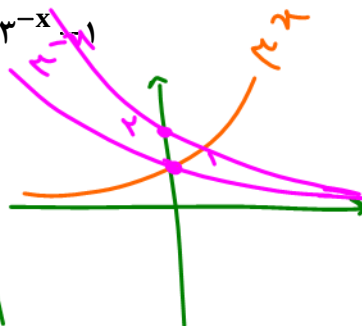
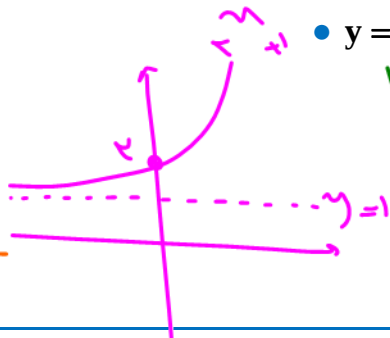
۳۸- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

• $y = 2^x + 1$

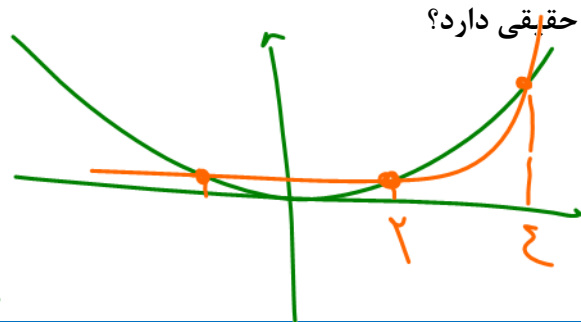
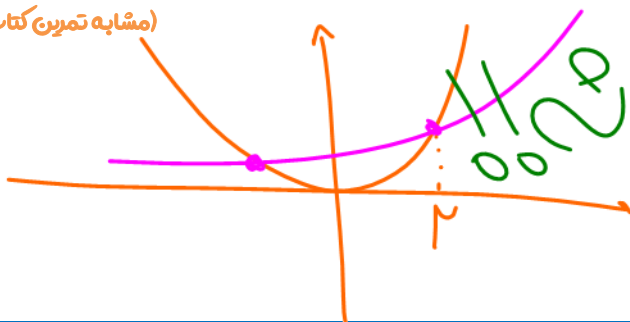


• $y = 2 \times 3^{-x} - 1$



۳۹- نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را در یک دستگاه رسم کنید. و مشخص کنید معادله $2^x = x^2$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۰- هریک از معادلات نمایی زیر را حل کنید.

• $4^{x^2-2x} = 16^{-2x}$

$$4^{x^2-2x} = 16^{-2x} \Rightarrow 2^{2(x^2-2x)} = 2^{4(-2x)} \Rightarrow x^2-2x = -4x \Rightarrow x^2+2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x=0, x=-2$$

• $3^{x+2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \sqrt{27}^{2x}$

$$3^{x+2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \sqrt{27}^{2x} \Rightarrow 3^{x+2} \times 3^{-(x-1)} = 3^{3x} \Rightarrow 3^{x+2-x+1} = 3^{3x} \Rightarrow 3^{3} = 3^{3x} \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow x=1$$

• $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 2^2 = 0$

$$4^x - 3 \times 2^{x+1} + 2^2 = 0 \Rightarrow 4^x - 6 \times 2^x + 4 = 0$$

$$t^2 - 6t + 4 = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$