



مجموعه آموزشی سگو

# ساخت ماتریکسی

درای

شماره سطر  $I \rightarrow$

شماره ستون  $j \rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} & n \\ 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Diagram illustrating the construction of a matrix  $A$  with dimensions  $2 \times 3$ . The matrix is shown with its elements:  $-3$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $n$  in the first row;  $1$ ,  $-\frac{1}{4}$ ,  $0$  in the second row; and  $5$ ,  $4$ ,  $0$  in the third row. The matrix is labeled  $A$  and its dimensions are indicated as  $2 \times 3$ . Red arrows point from the elements to their corresponding row and column indices:  $a_{13}$  points to  $n$ ,  $a_{23}$  points to  $0$ , and  $a_{21}$  points to  $1$ . Blue circles highlight the elements  $-3$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $n$ ,  $1$ ,  $-\frac{1}{4}$ , and  $0$ . A blue box highlights the element  $-\frac{1}{4}$ .

## نمونه سوال:

اگر ماتریس  $A = [i^2 - 3j]_{3 \times 3}$  باشد مجموع درایه‌های ستون سوم ..... است. -13

|  |  |    |               |
|--|--|----|---------------|
|  |  | -8 | <sub>13</sub> |
|  |  | -5 | <sub>23</sub> |
|  |  | 0  | <sub>33</sub> |

اگر ماتریس  $A = \begin{cases} i & i > j \\ 3 & i = j \\ i + j & i < j \end{cases}$  3x3 باشد اختلاف سطر دوم با ستون اول چقدر است؟ 2

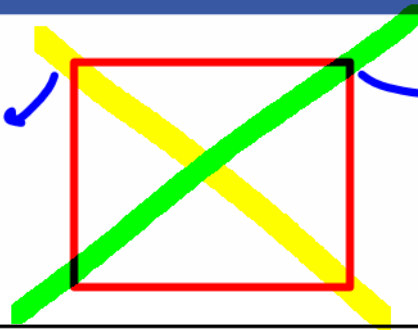
8 ←

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 3 |   |   |  |
| 2 | 3 | 5 |  |
| 3 |   |   |  |

→ 10



قطر اصلی



قطر فرعی

## طرفی چند ماتریس خاص

|                                                                               |                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| ۱- ماتریس صفر:                                                                | ۴- ماتریس مربعی $(n \times n)$ ← مرتبه $n$               |
| $\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ | ۵- ماتریس قطری ← در قطر اصلی عدد بقیه صفر                |
| ۲- ماتریس سطری: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$                 | ۶- ماتریس اسکالر ← ماتریس قطری که روی قطر اصلی برابر.    |
| ۳- ماتریس ستونی: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$              | ۷- ماتریس همانی ← ماتریس اسکالری که روی قطر اصلی ۱ باشد. |

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

قطری

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## نمونه سوال:

جاهای خالی را پر کنید.

(I) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی برابر باشد، ماتریس اسکالر می‌گویند.

(II) اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & x+5 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix}$  قطری باشد حاصل  $x+y$ ، ..... است.   
 -415 -5 1/2

(III) اگر  $A = \begin{bmatrix} m-1 & 0 & t+1 \\ 0 & 3 & 2z-1 \\ 0 & 0 & 2n-1 \end{bmatrix}$  اسکالر باشد  $m+t-n-z$ ، ..... است.   
  $m=4$   $t=-1$   $z=1/2$   $n=2$

## نمونه سوال:

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(۱) هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است. ✓

(۲) هر ماتریس اسکالر را می‌توان به صورت  $KI$  نوشت. ✓

(۳) مجموع درایه‌های  $I_3$ ، ۳ است. ✓

# تساوی دو ماتریسی

نمونه سوال:

$$x + y = 3 \rightarrow y = -2$$

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ x-1 & t \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2t-1 \end{bmatrix}$  باشد. حاصل  $x + y + t$  ..... است.

Handwritten notes:

- $5 - 2 + 1$
- $4$
- $2t - 1 = t$
- $t = 1$
- $x = 5$



## جمع و تفریق دو ماتریسی و ضرب عدد در ماتریسی

$$r(A \pm B) = rA \pm rB$$

$$\cancel{r}A = \cancel{r}B \xrightarrow{\div r} A = B$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 2 & 6 & 10 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

نمونه سوال: اگر  $A = [i + 2j]_{3 \times 3}$ ،  $B = [i - j]_{3 \times 3}$  باشد مجموع درایه‌های  $A - 2B$  را بیابید.



## نمونه سوال:

ماتریس‌های مرتبه ۲ و ۳

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  از رابطه ماتریس  $2A - I_2 = 3B$  حاصل ضرب درایه‌های واقع روی قطر اصلی  $B$  را بیابید.

$$3B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div 3} B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. اگر  $2A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$  باشد،  $x$ ،  $y$  را به دست آورید.



نمونه سوال:

$$m = -1$$

$$n = 2$$

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری باشد و  $B = \begin{bmatrix} 3n-1 & n \\ m & m-2 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $A - 2B$  را بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -14 & -4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

## نمونه سوال:

درست و نادرست را مشخص کنید.

(۱) برای هر دو ماتریس هم مرتبه  $A + B = B + A$  ✓

(۲) برای هر دو ماتریس هم مرتبه  $A + (B + C) = (A + B) + C$  ✓  
خاصیت ترکیبی دایره.

(۳)  $A + \bar{O} = A$

(۴) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس و  $r$  یک عدد حقیقی باشد آنگاه  $r(A + B) = rA + rB$  ✓

(۵) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس و  $r$  یک عدد حقیقی باشد آنگاه  $rA = rB \Rightarrow A = B$  ✓



$$A \times B = [ \quad ]$$

$$-4 + 0$$

سطر از اولی

ستون از دوم

ضرب دو ماریکسی

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -13 \\ -2 & 21 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2$   $2 \times 2$   $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$3 \times 2$   $2 \times 4$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \quad \quad \end{bmatrix}$$

$3 \times 4$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \checkmark$$

نمونه سوال:

اگر  $A = [i - j]_{2 \times 2}$  و  $B = \begin{cases} 1 & i \geq j \\ i & i < j \end{cases}$  مرتبه ۲ باشد حاصل  $A \cdot B - 2A^2$  را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$



$$A \times B \neq B \times A$$

نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  و  $AB = \begin{bmatrix} x-y & x+y \\ m & n-1 \end{bmatrix}$  باشد مقادیر  $m$  و  $n$  و  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$
$$\begin{aligned} x-y &= 4 & x-1-y &= 4 \\ x+y &= -6 & -y &= 5 \\ \hline 2x &= -2 & y &= -5 \\ x &= -1 & & \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} m &= 9 \\ n-1 &= -3 \rightarrow n = -2 \end{aligned}$$

## نمونه سوال:

$A = \begin{cases} -1 & |i-j| > 1 \\ 0 & |i-j| = 1 \\ 1 & |i-j| < 1 \end{cases}$  باشد ماتریس  $A^2 - 2I$  بیابید. ( $A$  مرتبه 3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



نمونه سوال:  $m=2$

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & n+1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $A$  قطری باشد حاصل  $A.B$  را بیابید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y & t \\ z & w & k \\ p & m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay & at \\ bz & bw & bk \\ cp & cm & cn \end{bmatrix}$$

نتیجه گیری:



# نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  باشد و  $A^2 = mA + nI$  بیابید.

دترمینان  $m, n$  باشد

عزب قطر فزی - عزب قطر اصلی - دترمینان

$$A^2 = mA + nI$$

مجموع قطر اصلی

راه حل نته!

$$A^2 = 1A - (-8)I$$

$$= 1A + 8I$$

$m=1$   $n=8$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$mA + nI = \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} n=8 \\ m=1 \end{matrix}$$



$$[K]_{11} = K$$

$$\begin{aligned} \lambda(-\lambda+2)+3 &= 0 \\ -\lambda^2+2\lambda+3 &= 0 \\ \lambda &= -1 \\ \lambda &= 3 \end{aligned}$$

نمونه سوال:

از معادله ماتریس  $\begin{bmatrix} X & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = 0$  مقادیر  $X$  را بیابید.

$- \lambda + 2$

$$\begin{bmatrix} -\lambda+2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$



## نمونه سوال:

مقادیر  $x, y$  را طوری بیابید که یک ماتریس قطری باشد؟

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3$        $3 \times 2$

$$2x - 1 + 4y$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 1 + 4y \\ y + 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$y = -7$

$$\begin{bmatrix} -2x + 4 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow x = 2$$



$$A \times B = B \times A \Rightarrow$$

$$A \times I = I \times A$$

$$① A = B$$

② تعویض پذیر A و B

$$③ A = \overline{0} \text{ و } B = \overline{0}$$

$$④ A = I \text{ و } B = I$$

نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix}$  باشد و A و B تعویض پذیر باشند a و b را بیابید.

$$A \times B = B \times A$$

$$\begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2a+5b & 10a-40 \\ -4+3b & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2a+20 & 20 \\ ab-16 & 5b-24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10a-40=20 \Rightarrow a=6 \\ 5b-24=-4 \Rightarrow b=4 \end{cases}$$



## نمونه سوال:

اگر  $A = [i - j]$ ، تبه ۳ باشد سطر سوم ماتریس  $A^3$  را بیابید.

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ -12 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = I \rightarrow \vec{A}^2 = I$$

$$\vec{A}^2 = A$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = I \times I = I$$

$$A^7 = A \times A^6 = A \times (A^2)^3$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^7 = A^4 = A - I = \dots$$

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $A^4 - A^3$  را بیابید.



$$= A \times (I)^3 = A \times I \times (A)$$

## نمونه سوال:

اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ باشند اگر تعویض پذیر باشند ثابت کنید:

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

$$A^2 + \cancel{AB} - \cancel{BA} - B^2 \xrightarrow[\substack{A, B \text{ تعویض پذیرند} \\ AB = BA}]{A^2 - B^2}$$

طرف دوم رابطه‌ی زیر را بنویسید.

$$(A - 3I)^2 = ? \xrightarrow[\substack{\text{درون } A \text{ و } I \text{ ضرب شوند} \\ \text{باید با هم داد} \\ \text{پس از آنجا دهی} \\ \text{استفاده می‌کنیم}}]{A^2 - 6A + 9I}$$



نمونه سوال:

اگر  $A^2 = 2A$  و  $A - 2B = I$  باشد مجموع  $B^6$  را بیابید.

$$2B = A - I \Rightarrow B = \frac{1}{2}(A - I)$$

$$B^2 = \frac{1}{4}(A^2 - 2A + I)$$

$$B^2 = \frac{1}{4}I \xrightarrow{\text{قوان 3}} B^6 = \frac{1}{64}I = \begin{bmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$

## نمونه سوال:

جاهای خالی را پر کنید.

(۱) اگر  $A \times B = B \times A$  باشد آن گاه آن دو ماتریس را، ..... می نامیم.

(۲) اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  مجموع درایه های واقع بر قطر اصلی  $A^2$ ، ..... است.

(۳) حاصل  $A \times I$  برابر، ..... است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

(۴) اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد آن گاه  $A^{11}$  برابر، ..... است.

$$A^{11} = A^{10} \times A$$

$$= (A^2)^5 \times A = (-I)^5 \times A = -I \times A = -A$$



## نمونه سوال:

(۱) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند آنگاه همواره رابطه‌ی  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  برقرار است.

(۲) در حالت کلی، ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی دارد.

(۳) برای هر سه ماتریس  $AB = AC$  داریم  $B = C$ .

(۴) از اتحادها همواره می‌توان در ماتریس‌ها استفاده کرد.



$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - cb$$

دترمینان مرتبه ۲:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 \left( \begin{array}{c|c|c} 3 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array} \right) - (-4 - (-2)) + \left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 3 & 1 \\ \hline -2 & 1 & -2 \end{array} \right) = -7$$

$$|A| = + \left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c|c|c} 3 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 2 \end{array} \right) = -7$$

دترمینان مرتبه ۳:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \left( \begin{array}{c|c|c} 4 & -18 & 2 \\ \hline -12 & - & \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c|c|c} 3 & 4 & -12 \\ \hline -5 & - & \end{array} \right) = -7$$



## نمونه سوال:

اگر  $A = [i^2 - j]$  و  $B = [i + j]$  هر دو مرتبه دو باشند دترمینان ماتریس  $A \cdot B$  و  $2A - B$  را بیابید.

$$|A \cdot B| = \cancel{|A|}^3 \cdot \cancel{|B|}^{-4} \checkmark = -3$$

$$|2A - B| \neq |2A| - |B|$$

$$|2A - B|$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$



## نمونه سوال:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

$$|B| = -6$$

$$|A \times B| = -6$$

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $|A \times B| + |2I_3|$  را بیابید.

$$|A \times B| = |A| \times |B| = -24$$

$$|C| = 8$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = 8$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (4 - 9 - 4) - (-4 - 12 + 3) = 4$$



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \overbrace{(-5)} - 6 = (0 - 3 - 2) - (0 + 2 + 4) = -11$$

نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری باشد دترمینان را بیابید.

$m=2$   
 $n=1$

$$\begin{bmatrix} 2+7 & 4x+3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = A$$

$24x+18$

به ازای کدام مقدار  $x$  دترمینان ماتریس  $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  برابر ۵ است.

$2x + 2 + 2x + 1$

$2x + 2 + 2x + 1$

$$|A|=5 \Rightarrow 7x+49-24x-18=5$$

$$-17x+31=5 \Rightarrow -17x=-26 \Rightarrow x=\frac{26}{17}$$



## ویژگی‌های دترمینال

$$① |A \times B| = |A| \times |B|$$

$$② |A^n| = |A|^n \rightarrow |A^3| = |A|^3$$

$$③ |kA| = k |A|$$

مرتبه

$$④ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ e & f & k \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} e & b & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f & a & c \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & a & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

## نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  باشد دترمینان ماتریس  $\left| \frac{1}{2} A \right|$  را بیابید.

$$\left| \frac{1}{2} A \right| = \frac{1}{8} (2) = \frac{1}{4}$$

~~$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$~~

$$\underbrace{(-2 + 2 + 0)}_0 - \underbrace{(-4 + 2 + 0)}_{-2} = 2$$



## نمونه سوال:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  و اسکالر باشد و  $a_{11} = 4$  باشد، دترمینان  $-\frac{1}{2}A^4$  را بیابید.

$$\left| -\frac{1}{2}A^4 \right| = -\frac{1}{8} |A|^4 = -\frac{1}{8} \times (4^3)^4 = -\frac{1}{8} \times 4^{12} = -\frac{2^{24}}{2^3} = -2^{21} \checkmark$$

اگر  $|A| = 4$  و مرتبه ۳ باشد، دترمینان  $|A| \cdot A$  را بیابید.

$$|A| \cdot A = 4 \cdot A = 4 \cdot A$$

$$= 4^3 \times 4 = 4^4 = 2^8 = 256 \checkmark$$





## نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{cases} 2 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  و  $A$  مرتبه ۳ باشد و حاصل  $|kA| = 128$  باشد  $k$  را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad |A| = 8$$

$$k \cdot |kA| = k \cdot k^3 |A| = 128 \rightarrow k^4 \times 8 = 128 \Rightarrow k^4 = 16 \Rightarrow k = 2$$

اگر  $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  باشد دترمینان  $|3A|$  را بیابید.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A^3| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A|^3 = 8 \Rightarrow |A| = 2$$

$$|3A| = 3^2 \times |A| = 9 \times 2 = 18$$



## وارن ماتریکسی

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = I$$

$$A \times \text{?} = I$$

$A^{-1}$

\* اگر دترمینان صفر باشد آن ماتریس وارون ندارد.  
ا.ت.



## نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $A^{-1} \cdot B$  را بیابید.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$



## نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $A^{-1} \cdot B$  را بیابید.



## نمونه سوال:

۹۰  
۳۶  
-۱۲۰ - ۱۲۶

$$B = \begin{bmatrix} a-3 & a \\ a-5 & 1-a \end{bmatrix}$$

را بیابید.

وارون پذیر نباشد، وارون ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 3-a & 4 \\ a & -3 \end{bmatrix}$$

اگر

$$|A|=0 \Rightarrow -9+3a-4a=0$$

$$-9-a=0$$

$$a=-9$$

$$B = \begin{bmatrix} -12 & -9 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-246} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 14 & -12 \end{bmatrix}$$



## نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{cases} i+j & i=j \\ i & i \neq j \end{cases}$  و  $B = [i^2 - j]$  و هر دو از مرتبه ۲ باشند وارون ماتریس  $AB$  را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



نکته: اگر درایه‌های یک ماتریس خودشان بر حسب دترمینان باشند  
آنوقت، از طرفین آن ماتریس دترمینان بگیریم

نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ |A| & |A| \end{bmatrix}$ ، وارون ماتریس  $A$  را بیابید.

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & 3 \\ |A| & |A| \end{vmatrix} \rightarrow |A| = |A|^2 - 3|A|$$

$$|A|^2 - 4|A| = 0 \rightarrow |A| = 0 \times$$

$$\rightarrow |A| = 4 \checkmark \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

## نمونه سوال:

(6) - 4 -

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^{-1} + B$  را بیابید.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} + B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$





$$B = \textcircled{I} B \\ = C \cdot \textcircled{A} \cdot B = C I = \textcircled{C}$$

بے تکند وارون یک ماتریس یکتاست.  
فرض کنیم  $B$  و  $C$  وارون  $A$  است پس ماتریس  $B = C$

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -14 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

+8

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -8 \textcircled{-16} = 8 \checkmark$$

$$C \cdot A = I$$

تیپ مهم

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = \frac{B}{A} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot \textcircled{A} = B \\ \boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$



## نمونه سوال:

از رابطه‌ی زیر ماتریس  $X$  را بیابید.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & +1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}} X = \overset{B}{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}} \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$
$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 25 & 1 \end{bmatrix}$$



## نمونه سوال:

$$2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  باشد ماتریس  $C$  را از رابطه‌ی  $AC - 2I = B$  بیابید.

$$A \cdot C = 2I + B$$

$$C = A^{-1} \cdot (2I + B)$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}$$



نکته:

$$|A| = k \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{k}$$

$$|A| = 3 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

## نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  باشد دترمینان وارون ماتریس  $A$  .....  $\frac{1}{15}$  ..... است.

$$|A| = 3 - (-12) = 15$$

## نمونه سوال:

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$  باشد دترمینان  $2A^{-1}$  ..... است.

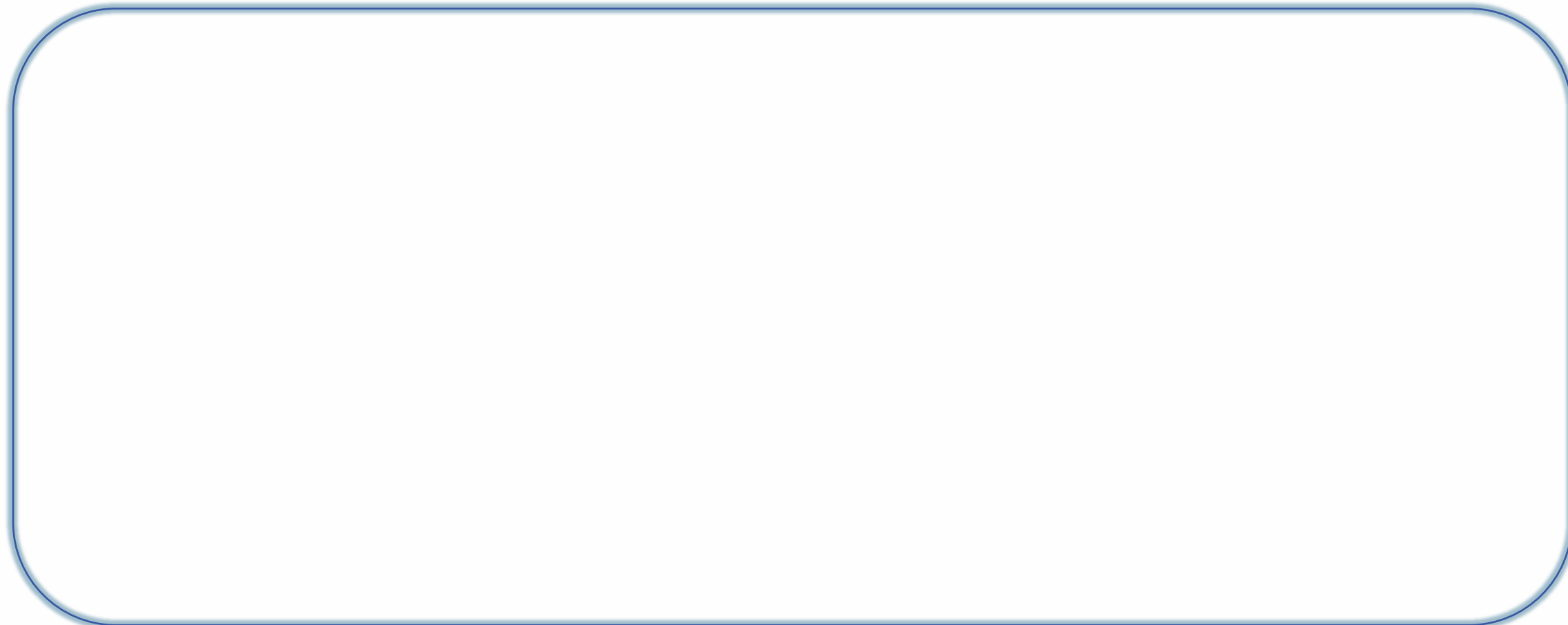
$$|2A^{-1}| = 8 |A^{-1}| = \frac{-8}{-9}$$

~~$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-2) + 3(-2-2) = -4 + 2 - 12 = -14$$~~

$$\underbrace{(0-1-6)}_{-7} - \underbrace{(6-4+0)}_2 = -9$$



## دستگاه معادلات خطی





## نمونه سوال:

دستگاه‌های زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ضرایب}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ معلومات}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ مجهولات}$$

$$\text{الف) } \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -5 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$



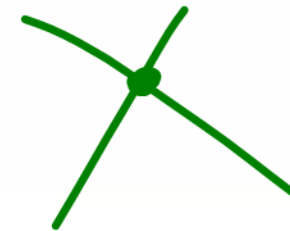
## نمونه سوال:

دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که ماتریس ضرایب  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$  و ماتریس معلومات  $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$  باشد و سپس آن را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -14 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



|            |                                                 |             |                                              |         |                                  |
|------------|-------------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------|---------|----------------------------------|
| جواب ندارد | $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ | بیشمار جواب | $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ | یک جواب | $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ |
|------------|-------------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------|---------|----------------------------------|

آوردن این صاف تر است فرایب می شود  
دست ها جواب ندارد:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

نمونه سوال:

$A^{-1}$

$$\frac{m-1}{3} \neq \frac{4}{m+3} \neq \frac{6}{9} \neq \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} (m-1)x + 4y = 6 \\ 3x + (m+3)y = 9 \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار  $m$  دستگاه

$$m^2 + 2m - 15 = 0$$

$$(m+5)(m-3) = 0$$

$$m = -5 \checkmark$$

$$m = 3 \times$$

## نوشتن معادله دایره

برای نوشتن معادله دایره نیازمند:

(۱) مرکز  $O(\alpha, \beta)$

(۲) شعاع  $R$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

## نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقاط  $(-3, 2)$  و  $(1, -6)$  دو سر قطری از آن باشد؟

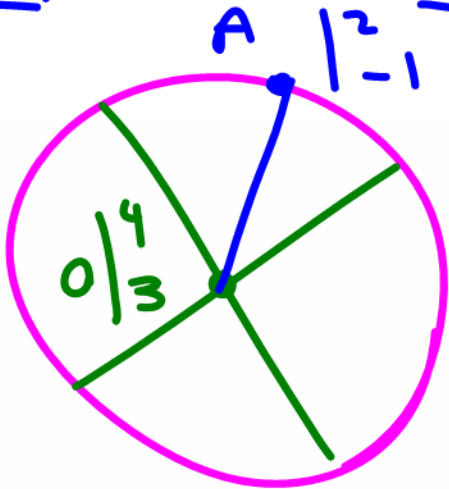
① معنای وسط: — میانی

②  $AB = \sqrt{(6-2)^2 + (-8)^2}$

$OA = R = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$

## نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که دو خط  $x+y=7$  و  $x-y=1$  معادلات قطری از آن باشد و از نقطه‌ی  $(2, -1)$  بگذرد؟



$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$$


---


$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$R=OA=\sqrt{4+16}=\sqrt{20} \longrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=20$$

## نمونه سوال:

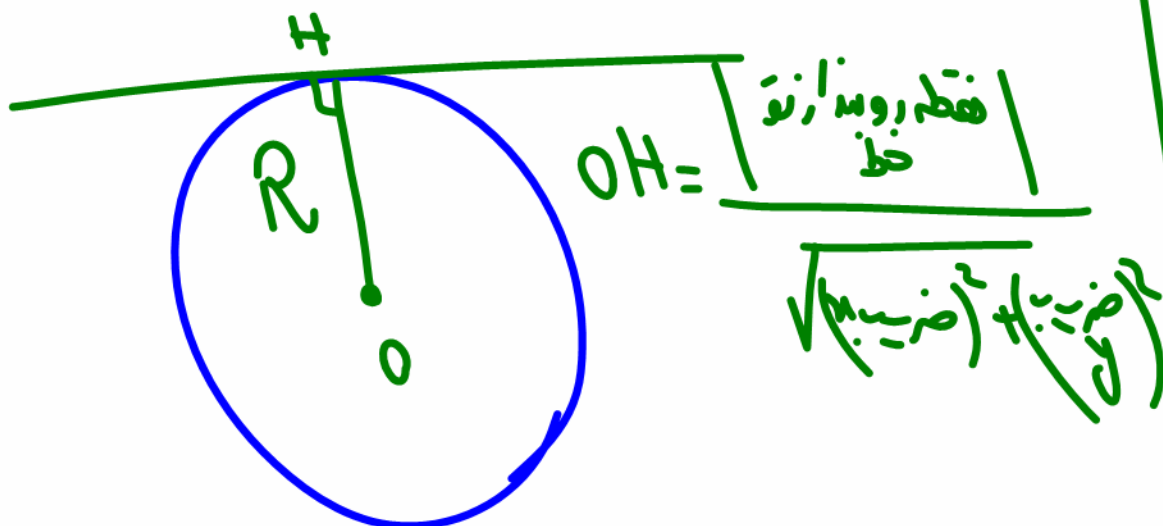
معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $(2, -1)$  بوده و بر خط به معادله  $3x - 4y = -1$  مماس باشد.

فاصله نقطه تا خط:

$$OH = R = \frac{|6 + 4 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{11}{5}$$

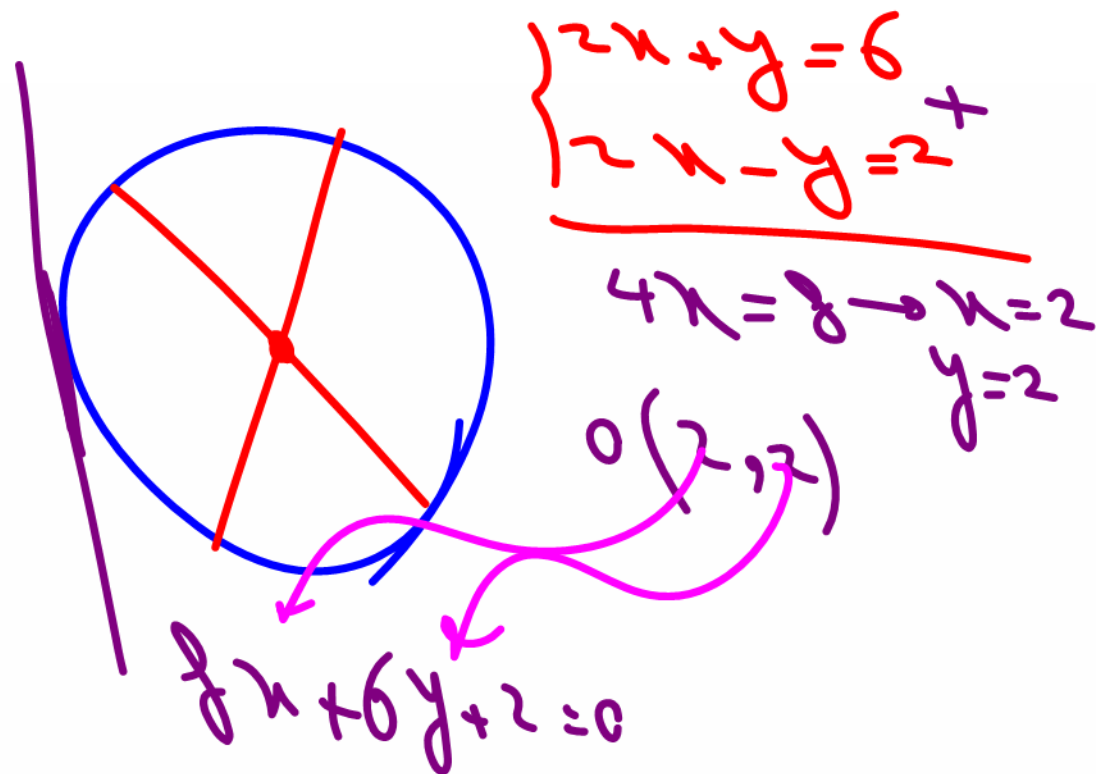
$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{121}{25}$$

3)



## نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که دو خط  $2x + y = 6$  و  $2x - y = 2$  معادلات قطری از آن باشد و بر خط  $8x + 6y + 2 = 0$  مماس باشد.

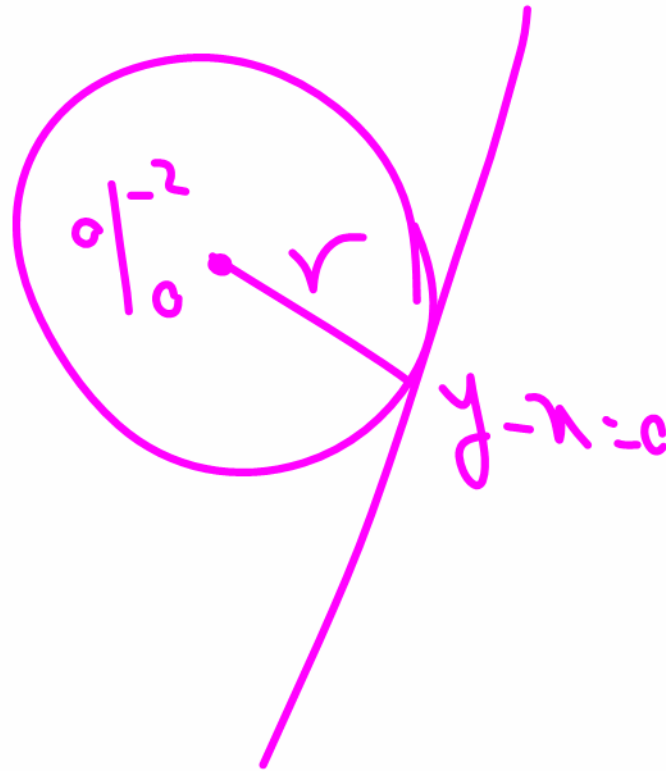


$$OH = R = \frac{|16 + 12 + 2|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{30}{10} = 3$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

## نمونه سوال:

مساحت دایره‌ای که مرکز آن  $(-2, 0)$  بوده و بر نیمساز ربع سوم مماس است را بیابید.

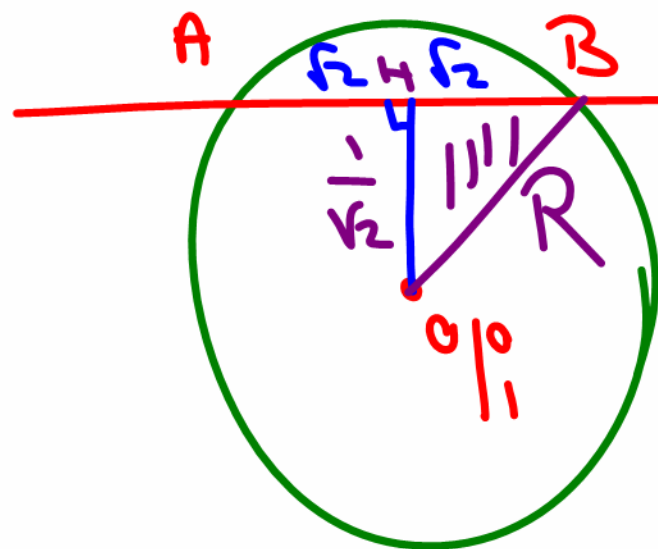




## ④ اندازه مرکز دایره به وتر منفرجه ای و تر منفرجه ای

### نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن بوده و روی خط به معادله  $x + y = 2$  و تری به طور  $2\sqrt{2}$  جدا کند؟



$$x + y - 2 = 0$$

$$OH = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R^2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2}$$



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

نمونه سوال:

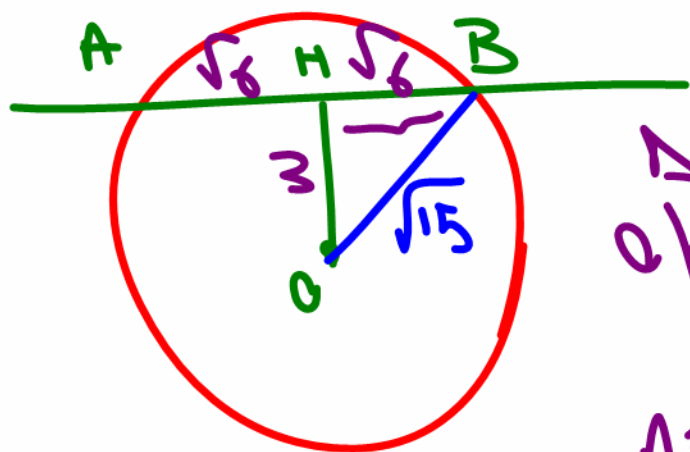
طول وتری از دایره‌ی  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$  که روی خط به معادله‌ی  $5x + 12y + 10 = 0$  جدا می‌کند چقدر است؟

$$O \left( \frac{1}{2} \right) \quad r = \sqrt{5}$$

$$OH = \frac{|5 + 24 + 10|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{39}{13} = 3$$

$$\triangle OHB : 5 = 9 + HB^2 \rightarrow HB = \sqrt{4}$$

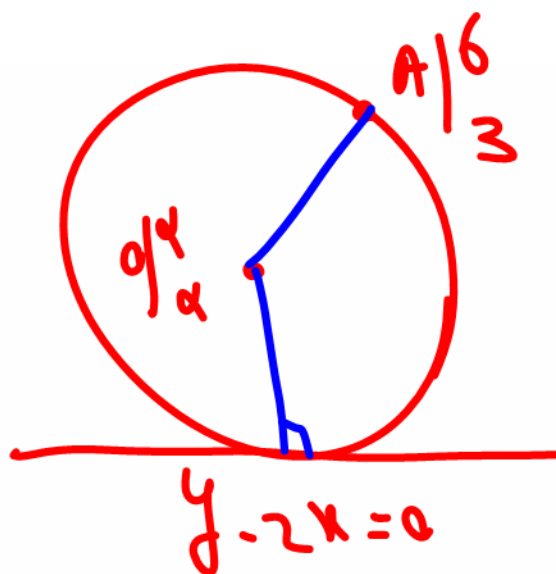
$$AB = 2\sqrt{4}$$



## نمونه سوال:

مرکز دایره‌ای روی نیمساز ناحیه اول است، اگر این دایره از نقطه  $A(6,3)$  بگذرد و بر خط  $y = 2x$  مماس باشد، شعاع آن کدام است؟

$$OA = r$$



$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x-2y|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow (x-6)^2 + (y-3)^2 = \frac{x^2}{5}$$

$$\begin{aligned} 0/5 &\Rightarrow OA = R = \sqrt{(6-5)^2 + (3-5)^2} \\ &\Rightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5 \end{aligned}$$

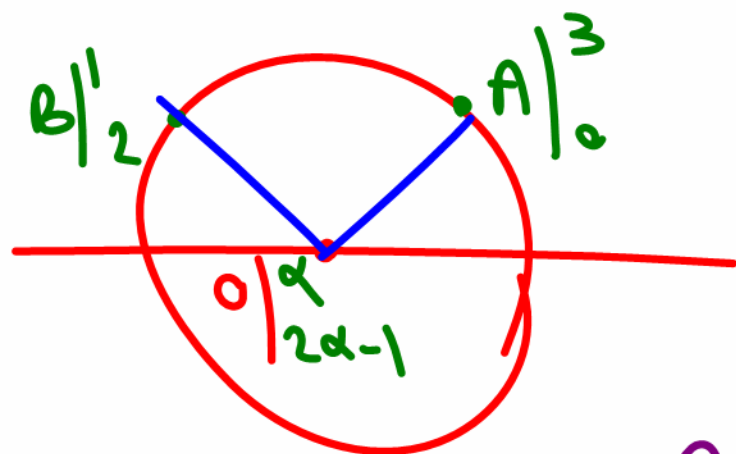
$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= 0 \\ &\Rightarrow (x-5)^2 = 0 \end{aligned}$$

# نمونه سوال:

از نقاط  $A(1, 2)$  و  $B(3, 0)$  دایره‌ای می‌گذرد اگر معادله یکی از قطرهای  $y = 2x - 1$  باشد معادله دایره را بنویسید.

$$B = 2A - 1$$

$$OA = OB$$



$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

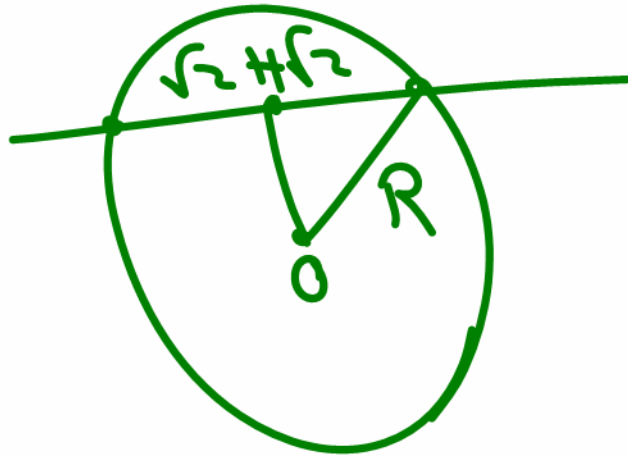
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \Rightarrow -6x + 9 = -2x + 1 - 4y + 4 \Rightarrow -4x + 4y = -4 \Rightarrow x - y = 1$$

$$O(0, -1) \quad OA = \sqrt{(3-0)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{10}$$

$$(x-0)^2 + (y+1)^2 = 10$$

## نمونه سوال:

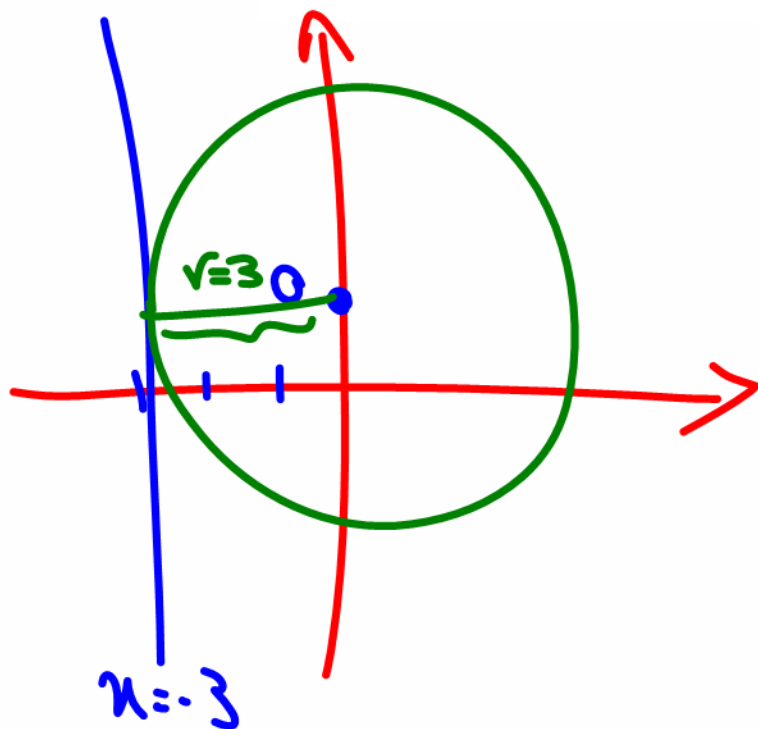
معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که خط‌های  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از آن باشد و روی خط به معادله‌ی  $x + y = 2$  و فاصله‌ی  $2\sqrt{2}$  را جدا کند؟



## نمونه سوال:

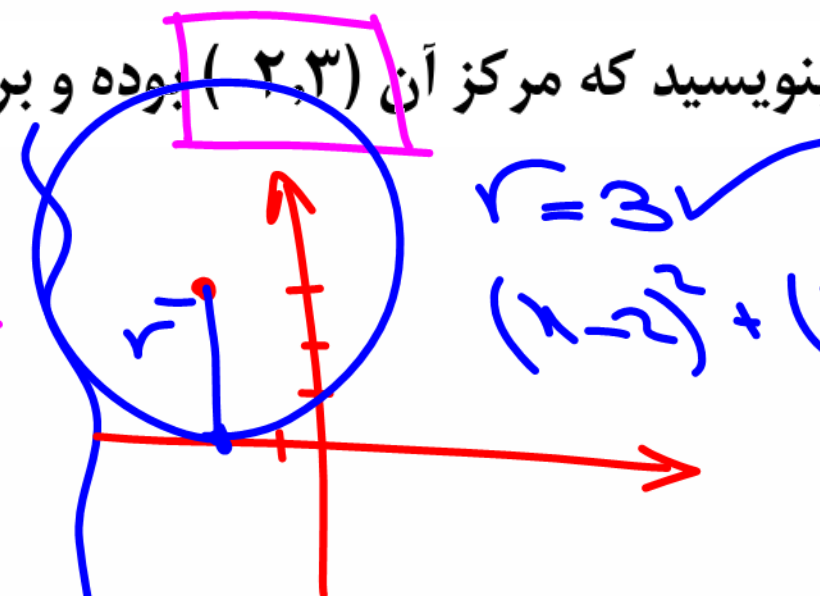
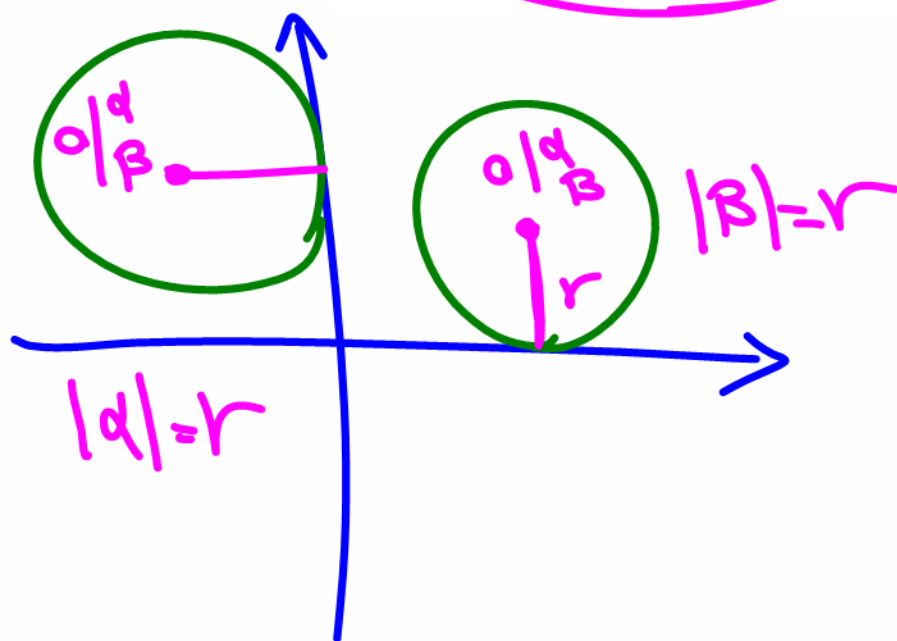
معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که  $O(0, 1)$  مرکز آن باشد و بر خط  $x = -3$  مماس باشد.

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 9$$



## نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $(2, 3)$  بوده و بر محور  $x$  مماس است.



$$r=3 \checkmark$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$



فرم استاندارد  
فرم مربع

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$O(2, -1), r=3$$

فرم استاندارد  
فرم مربع

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$x^2 - 4x + 7$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 7$$

$$(x-2)^2 + 3$$

معادله گسترده دایره

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\beta = -\frac{b}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 4c)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

شرط دایره:  $a^2 + b^2 - 4c > 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 20 = 0$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 - 80} < 0$$





## نمونه سوال:

ثابت کنید در فرم گسترده معادله دایره  $(x^2 + y^2 + ax + by + c = 0)$  شعاع از رابطه‌ی  $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$  و مرکز  $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  به دست می‌آید.



## نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای  $2x^2 + 2y^2 - 8x - 16y + 10 = 0$  شعاع دایره .....  $\sqrt{15}$  (مرکز آن  $(2, 4)$  است).

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 4x - 8y + 5 = 0 \\ R &= \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 - 20} = \frac{1}{2} \sqrt{60} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

اگر مساحت دایره  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - m = 0$  برابر  $\frac{\pi}{2}$  باشد  $m$  را بیابید.

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1 + 4m}$$

$10 + 4m$

$$\rightarrow 10 + 4m = 2 \rightarrow m = -2$$

## نمونه سوال:

شعاع و مرکز دایره  $x^2 + y^2 + (a+2)x + 2y = 1-a$  کدام است؟

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$$

$$C(-1, -1) \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 1 + 8} = \frac{1}{2} \sqrt{13}$$

حدود  $a$  برای این که  $x^2 + y^2 - 6x + 10y + a = 0$  بتواند دایره باشد را بیابید.

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y + \frac{9}{2} = 0$$

$$9 + 25 - 2a > 0 \rightarrow -2a > -34$$

$$a < 17$$

## نمونه سوال:

به ازای چه مقادیری از  $a$  معادله  $x^2 + y^2 + 4x + ay + 5 = 0$  یک دایره را مشخص کند؟

$$\begin{aligned} u^2 &> a \\ u &> \sqrt{a} \\ u &< -\sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 + a^2 - 20 &> 0 \\ a^2 - 4 &> 0 \rightarrow a^2 > 4 \rightarrow \begin{cases} a > 2 \\ a < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، منفی به معادله  $(a^2 - 3)x^2 + y^2 + x + y + a = 0$  یک دایره است و مرکز و شعاع را نیز بیابید.

$$a^2 - 3 = 1$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \rightarrow a = -2$$



$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

## نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای که از سه نقطه‌ی  $(0,0)$ ،  $(2,1)$ ،  $(1,-2)$  برابر کدام است؟

$$\xrightarrow{(0,0)} 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\xrightarrow{(2,1)} 4 + 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -5$$

$$\xrightarrow{(1,-2)} 1 + 4 + a - 2b = 0 \Rightarrow a - 2b = -5$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$5a = -15$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 3x + 1y = 0}$$

مختصات مرکز دایره‌ای که از سه نقطه‌ی  $A(1,1)$ ،  $B(-1,5)$ ،  $C(3,2)$  می‌گذرد کدام است؟

$$\xrightarrow{(1,1)} 1 + 1 + a + b + c = 0 \Rightarrow \boxed{a + b + c = -2} \quad ①$$

$$\xrightarrow{(-1,5)} 1 + 25 - a + 5b + c = 0 \Rightarrow -a + 5b + c = -26 \quad ②$$

$$\xrightarrow{(3,2)} 9 + 4 + 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = -13 \quad ③$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\times 2} 2a - 4b = 24 \xrightarrow{b = -7} a = -2 \\ & \xrightarrow{\times 2} 4a - 8b = 48 \\ & \xrightarrow{-} -4a + 3b = -13 \\ & \xrightarrow{-} -5b = 35 \Rightarrow b = -7 \end{aligned}$$

## وضعیت نسبی خط و دایره

بیرون دایره  $\rightarrow \oplus$

روی دایره  $\rightarrow \odot$

داخل دایره  $\rightarrow \ominus$

نقطه رو بنداز تو دایره

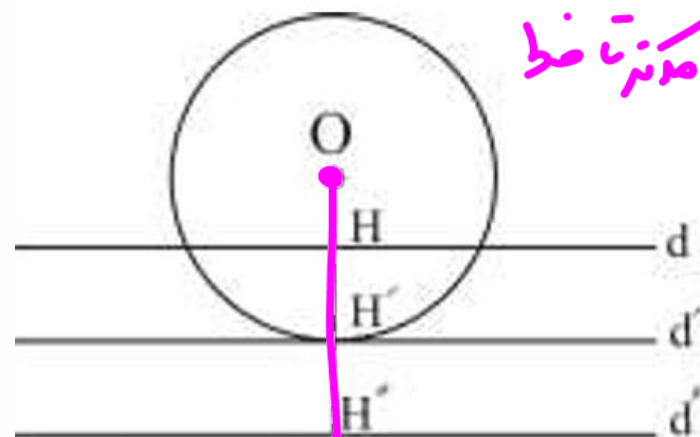
## نمونه سوال:

نقطه‌ی  $(-2, 1)$  نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 10 = 0$  بیرون است.

$$4 + 1 + 8 + 2 - 10 > 0$$

مقدار  $m$  را طوری به دست آورید که نقطه‌ی  $(2, 3)$  درون دایره  $x^2 + y^2 - 2mx + (m-1)y + 3m + 1 = 0$  باشد.

## وضعیت نسبی خط و دایره



متقاطع  $\rightarrow R >$  فاصله مرکز تا خط

مماس  $\rightarrow R =$

داخل  $\rightarrow R <$

(۱) مرکز و شعاع رو پیدا کن.

(۲) فاصله مرکز رو تا خط پیدا کن.

(۳) مقایسه کن.

### نمونه سوال:

وضعیت خط  $3x + 4y = 0$  را نسبت به دایره  $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$  مشخص کنید.

$$OH = \frac{|6 - 8|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$r = 3$  (دایره)

مقاطع



## نمونه سوال:

وضعیت خط  $x + y - 1 = 0$  و دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  را نسبت به هم مشخص کنید.

$$O(1, 1)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 8} = 2$$

$$OH = \frac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مقاطع

$$O(3, -1)$$

اگر خط  $3x - 4y + 2 = 0$  و دایره  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + m = 0$  نقطه برخوردی نداشته باشند حدود  $m$  را بیابید.

خط و دایره متقاطع

$$OH > R$$

$$O(3, -1)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 4m} = \frac{1}{2} \sqrt{4(10 - m)} = \sqrt{10 - m}$$

$$OH = \frac{|9 + 4 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$3 > \sqrt{10 - m}$$

$$9 > 10 - m$$

$$m > 1$$



$$10 - m > 0 \rightarrow m < 10 \rightarrow \boxed{1 < m < 10}$$

نمونه سوال:

اگر خط  $x + 3y = 2$  بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + m = 0$  مماس باشد  $m$  را بیابید.

$$0 \mid \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

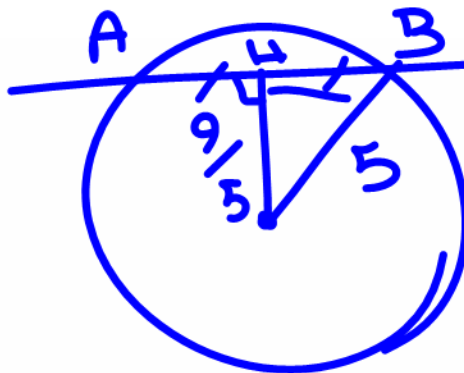
$$OH = \frac{|3 - 6 - 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{13 - m} = \frac{5}{\sqrt{10}} \rightarrow 13 - m = \frac{25}{10} \rightarrow m = 10.5$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 16 - 4m}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4(13 - m)} = \sqrt{13 - m}$$

طول وتری از دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 23$  که خط  $4x + 3y + 8 = 0$  روی آن جدا می‌کند را بیابید.

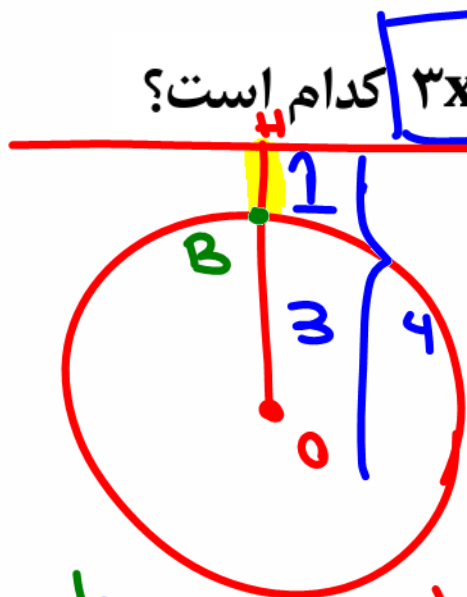


$$OH = \frac{|4 - 3 + 8|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{9}{5} \quad (10 - 1) < R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 92} = 5$$

نمونه سوال

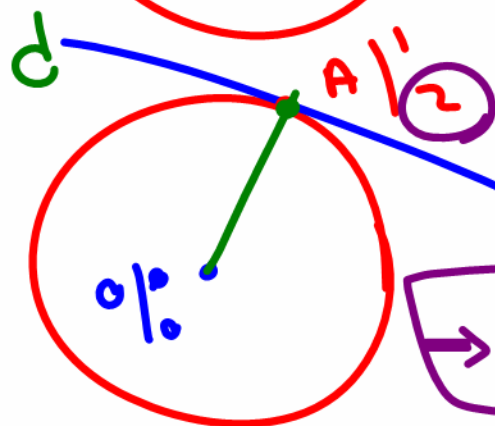
$$O(1, -2) \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = 3$$

فاصله نزدیکترین نقاط دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$  از خط به معادله  $3x + 4y = 15$  کدام است؟



$$HB = OH - R$$

$$OH = \frac{|3 - 8 - 15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$



معادله خط مماس بر دایره  $x^2 + y^2 = 5$  در نقطه  $A(1, 2)$  کدام است؟

$$m_{OA} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$OA \perp d \rightarrow m_d = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\begin{cases} y - y_A = m(x - x_A) \end{cases}$$

$$\frac{y - 2}{-3} = \frac{x - 1}{-\frac{1}{2}} \quad m = \frac{\text{تغییر در y ها}}{\text{تغییر در x ها}}$$

نکته: به نقطه  $A$  هم برخورد می کند



$$d = \frac{R}{r}$$

$$R = 3$$
$$r = 1$$

① مساوی با جسونه هاک بیرون

② مساوی با کسونه هاک داخل

③ بزرگتر از جسونه هاک خارج

④ کوچکتر از کسونه هاک داخل

بین  $d$

## وضعیت نسبی دو دایره

① مرکز و شعاع دو دایره را پیدا کن.

② فاصله دو مرکز را پیدا کن  $d$

③ مقایسه کن

متقاطع

## نمونه سوال:

وضعیت نسبی دو دایره‌های زیر را بررسی کنید.

$$O_1(0,0), R_1=1$$

$$O_2(3,1), R_2=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-36}=1$$

$$d=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}=3.16 \rightarrow \text{مقاطع}$$

$$d=\sqrt{\frac{18}{4}+\frac{18}{4}}=3$$

همکس بیرون

$$1) x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 - 2x = 4$$

$$2) \boxed{x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0}$$

$$3) \boxed{x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0}$$

$$O_1(0,0), R_1=1$$

$$O_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{18+18-20}=2$$



## نمونه سوال:

به ازای کدام مقدار  $a$  دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 4x = 0$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$  مماس خارجند؟

$$\begin{aligned} O_1(-2, 0) \\ R_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{16 + 0 + 0} = 2 \\ O_2(1, -4) \\ R_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{4 + 64 - 4a} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4(17 - a)} = \sqrt{17 - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{9 + 16} = 5 \\ 5 &= 2 + \sqrt{17 - a} \\ \sqrt{17 - a} &= 3 \rightarrow a = 8 \end{aligned}$$

معادله دایره‌ای را بنویسید که بر دایره  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  مماس خارج است و مرکز آن  $(8, 7)$  می‌باشد.

$$\begin{aligned} O_1(8, 7) \quad R_1 = ? \\ O_2(2, -1) \quad R_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 16} = 3 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$\begin{aligned} d &= 3 + R_1 = 10 \rightarrow R_1 = 7 \\ (x - 8)^2 + (y - 7)^2 &= 49 \end{aligned}$$

## نمونه سوال:

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0,1)$  باشد و بر دایره به معادله‌ی  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$  مماس داخل است.

$$d = |R_2 - R_1|$$

$$O_1(0,1), R_1 = ?$$

$$O_2(2,3), R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 12} = 4$$

$$d = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$d = |4 - R_1| = 2\sqrt{2}$$

$$4 - R_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow R_1 = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = (4 \pm 2\sqrt{2})^2$$





# هندسه ایمان ساریخانی

[www.sakkoo.ir](http://www.sakkoo.ir)

[t.m/Sakkoo\\_edu2](https://t.me/Sakkoo_edu2)