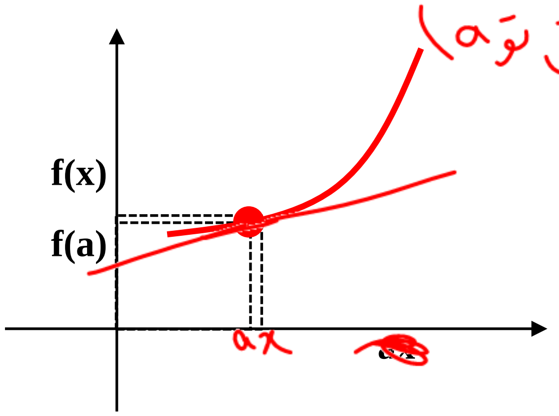
مشتق و تعریف مشتق

شیب خط مماس بر تابع f در نقطه a

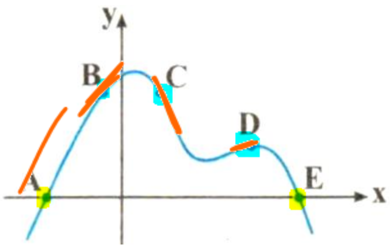


$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۱– از بین نقاط مشخص شده E, D, C, B, A روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:

- مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟ A
- مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟ C



۲– با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^{2}-3x$ را در نقطهٔ $x=2$ به دست آورید؟

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^{2}-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}}=1$$

$2x-3$

$4-3=1$ ✓

۳– با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x=5$ به دست آورید.

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\times\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$$

$x-1-4$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$ ✓

Riazi_AliAfrooz
RiaziAliAfrooz

اصول و روابط مشتق گیری

۱) فرمول های اصلی:

$0)\ a \xrightarrow{\prime} 0$ $\quad$ $0.5)\ ax \xrightarrow{\prime} a$

$1)\ kx^n \longrightarrow knx^{n-1}$ $\quad$ $3x^4 \xrightarrow{\prime} 12x^3$

$2)\ \sqrt{x} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $3)\ \dfrac{1}{x} \longrightarrow \dfrac{-1}{x^2}$

$2')\ \sqrt[m]{x^n} \longrightarrow \dfrac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$; $\sqrt[5]{x^3} \xrightarrow{\prime} \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

$1)\ \sin x \longrightarrow \cos x$ $\quad$ $2)\ \cos x \longrightarrow -\sin x$ $\quad$ $3)\ \tan x \longrightarrow 1+\tan^2 x$ $\quad$ $4)\ \cot x \longrightarrow -(1+\cot^2 x)$

۲) فرمول اعمال روی توابع:

$1)\ f \pm g \xrightarrow{\prime} f' \pm g'$

$2)\ f \times g \xrightarrow{\prime} f'g + g'f$

$3)\ f \div g \xrightarrow{\prime} \dfrac{f'g - g'f}{g^2} \longrightarrow \dfrac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\prime} \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$4)\ fog(x) \xrightarrow{\prime} g'(x) f'(g(x))$

$f(g(x))$

۳) مشتق گیری از توابع تو در تو:

$1)\ \sqrt[3]{\left(\dfrac{x-5}{x+1}\right)^2} \longrightarrow \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-5}{x+1}\right)^2}} \times \dfrac{6}{(x+1)^2}$

$2)\ \sin(x^2 + 5\sqrt{x}) \longrightarrow \cos(x^2 + 5\sqrt{x}) \times \left(2x + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}\right)$

۴–مشتق توابع سؤالات زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.)

- $f(x) = (2x^5 - 1)^4$

$f'(x) = 4(2x^5 - 1)^3 \times (10x^4)$

- $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 6}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 6}} \times (3x^2 + 4x)$

Riazi_AliAfrooz
RiaziAliAfrooz

- $f(x)=\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}\times\frac{11}{(x+1)^2}$$

- $f(x)=\frac{-7x^2+1}{x-6}$

$$f'(x)=\frac{(-14x)(x-6)-(1)(-7x^2+1)}{(x-6)^2}$$

- $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+4)$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+4)+(3x^2)\sqrt{3x+2}$$

- $f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3+x}\right)^3$

$$3\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3+x}\right)^2\times\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3+x)-(3x^2+1)\sqrt{x}}{(x^3+x)^2}$$

- $f(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x}$

$$\frac{-\cos^2 x-(-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$$

- $f(x)=\sqrt[3]{x}\tan^2 x$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times\tan^2 x+2(\tan x)(1+\tan^2 x)$$

- $f(x)=(x^4+\sqrt{x})\sin 2x$

$$\left(4x^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sin 2x+2\cos 2x(x^4+\sqrt{x})$$

Riazi_AliAfrooz

RiaziAliAfrooz

۵– اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=۲$ و $f(x)=\sqrt{۵-x^۲}$، آنگاه $(gof)'(۱)$ کدام است؟

$g'(2)=2$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5-x^2}}\times(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$

$g(f(1))'=f'(1)\,g'(\underbrace{f(1)}_{2})=f'(1)\times g'(2)=\frac{-1}{2}\times 2=-1$

۶– اگر $f(x)=۳x^۴-۵x^۳+x$ باشد، مقدار $f''(-۲)$ را به دست آورید.

$f'(x)=12x^3-15x^2+1$

$f''(x)=36x^2-30x \longrightarrow f''(-2)=144+60=204$

۷– شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۲+۳x$ را در نقطهٔ A به طول ۱– به دست آورید و سپس معادلهٔ خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ A بنویسید.

$f'(x)=2x+3 \longrightarrow f'(-1)=1$

$f(-1)=-2$

$\Rightarrow y=ax+b \xrightarrow{a=1} y=x+b \xrightarrow{(-1,-2)} -2=-1+b$

$b=-1$

$\Rightarrow y=x-1$

۸– معادله خط مماس برنمودار تابع $f(x)=\frac{\cos x}{۲+\sin x}$ را در نقطه‌ای به طول صفر بنویسید.

$f'(x)=\frac{-\sin x(2+\sin x)-\cos^2 x}{(2+\sin x)^2}$

$f'(0)=\frac{-1}{4}$ $\qquad$ $f(0)=\frac{1}{2}$

$y=ax+b \xrightarrow[b=1/2]{a=-1/4} y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

Riazi_AliAfrooz
RiaziAliAfrooz

مشتق پذیری

به کمک تعریف مشتق:

عدم برابری مشتق چپ و راست ... مشتق ندارد ← نقطه گوشه ای

بینهایت شدن جواب مشتق که در اثر ....عدم پیوستگی.... است

بعد از رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به $\frac{\text{عدد}}{0}$ برسیم ← ممکن نیست

۹- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x+2 & x<1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2$$

مشتق پذیر

۱۰- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقطهٔ $x=1$ بررسی نمایید.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$$

مشتق پذیر نیست و نقطه گوشه ای می باشد.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\frac{-(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=-2$$

۱۱- نشان دهید خط $x=2$ مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2}\times\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۱۲- اگر $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ x^2+3x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+3x}{x}=\frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}}=3$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$$

$\Rightarrow a=3$

آهنگ تغییرات

متوسط: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ **لحظه ای:** $f'(x_1)$

۱۳– آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)=2x^2+5x+1$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ چند برابر آهنگ تغییـــر متوســـط آن در بازه‌ی $[-2,0]$ است؟

$\dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\dfrac{1-(-1)}{2}=1$

$f'(x)=4x+5$

$f'(2)=13$

۱۴– معادلهٔ حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازهٔ $[0,5]$ (t برحســب ثانیــه) داده شــده است. سرعت متوسط را در بازهٔ $[0,5]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظهٔ $t=2$ به دست آورید.

$\dfrac{f(5)-f(0)}{5}=\dfrac{30-10}{5}=4$

$f'(t)=2t-1$

$f'(2)=3$

❋ در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

$f'(t)$

$f'(t)=4 \rightarrow 2t-1=4 \rightarrow t=5/2=2/5$

کل کاربرد مشتق!

ext مطلق

بده f

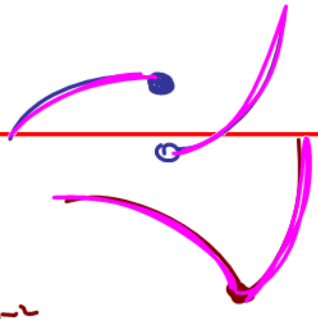
سر — ته

سر و ته بازه بسته

بحرانی ← $f'=$ صفر یا موجود ~~نیست~~ ← ریشه غیر مکرر زوج (مضاعف) ← ext نسبی

تعیین علامت f' → یکنوایی

		α		β	
f'	+		−		+
	↗	Max	↘	Min	↗



$f''=$ صفر یا موجود ~~نیست~~ ← ریشه غیر مکرر زوج ← عطف

تعیین علامت f'' → تقعر

		α		β	
f''	+		−		+
f	∪		∩		∪

عطف: مماس واحد — مشتق‌پذیر / مماس قائم

۱۵– در تابع $f(x)=x^4-2x^2$، مطلوب است:

- نقاط بحرانی:

$$f'(x)=4x^3-4x=0 \longrightarrow 4x(x^2-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

- وضعیت صعودی و نزولی و جنس اکسترمم نسبی:

		-1		0		1	
f'	−		+		−		+
	↘	Min	↗	Max	↘	Min	↗

- نقطه عطف و وضعیت تقعر:

$$f''(x)=12x^2-4=0 \to x^2=\frac{1}{3} \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
f''	+		−		+
	∪		∩		∪

۱۶– در تابع $f(x)=x^{3}-6x^{2}+9x+1$، مطلوب است:

$$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

- نقاط بحرانی: $\{1,3\}$
- نقاط بحرانی در بازه $[0,4]$: $\{0,1,3,4\}$

در بازه $[2,4]$؟ $\{2,3,4\}$

- وضعیت صعودی و نزولی و جنس اکسترمم نسبی:

		1		3	
f'	+		−		+
	↗	Max	↘	Min	↗

- اکسترمم مطلق در بازه $[-1,5]$:

$f(-1)=-15$ مطلق Min $\quad f(5)=21$ مطلق Max $\quad f(1)=5 \quad f(3)=1$

- نقطه عطف و وضعیت تقعر:

$$f''(x)=6x-12=0 \rightarrow x=2$$
عطف

		2	
f''	−		+
f	∩		∪

۱۷– در تابع $f(x)=\dfrac{x}{1+x^{2}}$، مطلوب است:

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}=0 \rightarrow 1-x^2=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

- نقاط بحرانی:
- نقاط بحرانی در بازه $[0,4]$: $\{0,1,4\}$
- وضعیت صعودی و نزولی و جنس اکسترمم نسبی:

		−1		1	
f'	−		+		−
	↘	Min	↗	Max	↘

۱۸– بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=-2x^{3}+6x+11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.

$$f'(x)=0 \rightarrow -6x^2+6=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$$

		−1		1	
f'	−		+		−
f	↘		↗		↘

$(-1,1)$

Riazi_AliAfrooz
RiaziAliAfrooz

۱۹– اگر نقطهٔ (۲,۱)، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر d و b را به دست آورید.

$f'(x)=3x^2+2bx$

$f'(2)=0 \to 12+4b=0 \to b=-3$

$f(2)=1 \to 8-12+d=1 \to d=5$

عطف ؟
$f(x)=x^3-3x^2+5$
$f'(x)=3x^2-6x$
$f''(x)=6x-6=0$
$x=1$ عطف

۲۰– اگر نقطه $A(-1,1)$ نقطه عطف منحنی $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

$f'(x)=3x^2+2ax+b \longrightarrow f''(x)=6x+2a$

$f''(-1)=0 \to -6+2a=0 \to a=3$

$f(-1)=1 \to -1+3-b-1=1 \to b=0$

۲۱– نمودار توابع زیررا رسم کنید

• $f(x)=\frac{2x-4}{x-1}$

① مجانب ها:

$x-1=0 \to x=1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

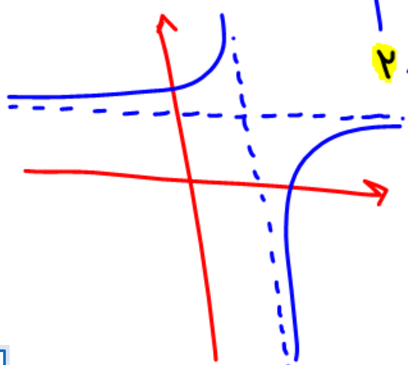
$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$

$\lim_{x\to \infty} f(x)=\frac{2x}{x}=2$

②

$f'(x)=\frac{2}{(x-1)^2}>0$

x		1	
f'	+		+
f	2 ↗	∞ ∥ −∞	↗ 2



• $f(x)=x^3-3x+2$

① اکسترمم

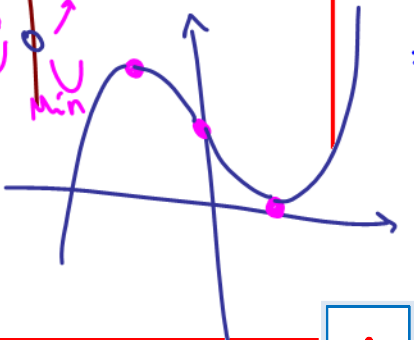
$f'=3x^2-3=0 \to x=\pm 1$

② عطف

$6x=0 \to x=0$

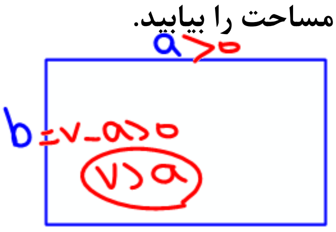
③ جدول تغییرات

x		−1		0		1	
f'	+	0	−		−	0	+
f''	−		−	0	+		+
f	↗ ∩	4	↘ ∩	2	↘ ∪	0	↗ ∪
		Max		عطف		Min	



Riazi_AliAfrooz
RiaziAliAfrooz

۲۲–در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید.

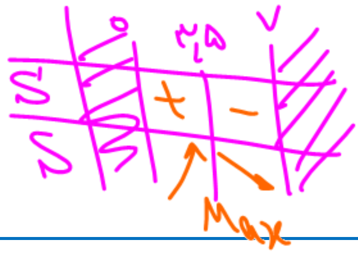


$a+b=7 \to b=7-a \qquad 0<a<7$

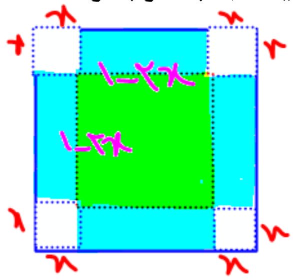
$S=ab \to S(a)=a(7-a)=7a-a^2$

$S'=7-2a=0 \to a=3.5$

$b=3.5$



۲۳–ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس حجم جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

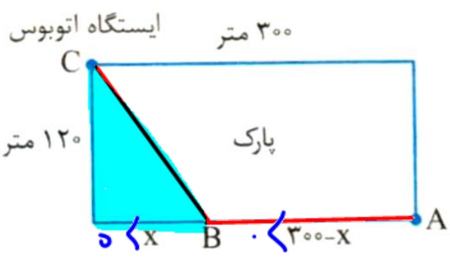


$V(x)=x(1-2x)^2 \qquad 0<x<\frac{1}{2}$

$V'(x)=(1-2x)^2-4(1-2x)x=0$

$(1-2x)(1-2x-4x)=0 \begin{cases} 1-2x=0 \to \cancel{x=\frac{1}{2}} \\ 1-6x=0 \to x=\frac{1}{6} \end{cases}$

۲۴–در شکل مقابل، شخصی در نقطهٔ A قرار دارد. او می‌خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد. این شخص می‌تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطهٔ A به سمت غرب برود و همچنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند. مقدار x کدام باشد تا این شخص در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟



$BC=\sqrt{x^2+14400}$

$t=\frac{300-x}{4}+\frac{\sqrt{x^2+14400}}{2} \qquad 0<x<300$

$\frac{300}{4}-\frac{1}{4}x$

$t'=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+14400}}=0$

$\Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+14400}}=\frac{1}{4} \to 2x=\sqrt{x^2+14400}$

$4x^2=x^2+14400 \to x^2=4800$

$x=\pm\sqrt{4800}$

Riazi_AliAfrooz
RiaziAliAfrooz