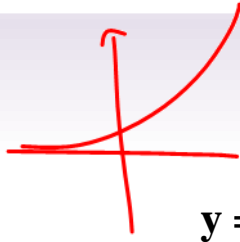


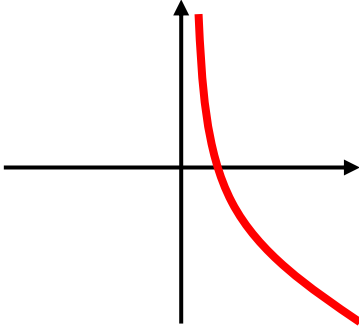
## لگاریتم

لگاریتم، معکوس تابع نمایی است:

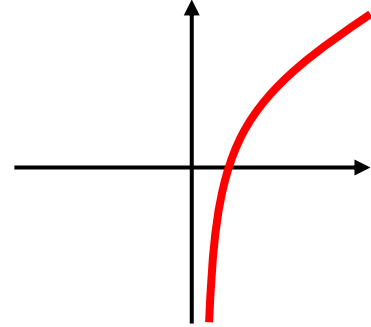


$$y = a^x \rightarrow x = a^y \rightarrow y = \log_a^x : x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$1 > a > 0$



$a > 1$



$$1) \log_b^a m = \frac{m}{n} \log_b^a$$

$$\log_4^{1/2} 16 = \frac{16}{2} \log_4^{1/2} = 8 \log_4^{1/2} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$2) \log_a^c (x \cdot b) = \log_a^c x + \log_a^c b$$

$$3) \log_a^c \frac{b}{d} = \log_a^c b - \log_a^c d$$

$$4) \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \rightarrow \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$5) a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

۱- با استفاده از نماد لگاریتم، تساوی‌های داده شده زیر را به صورت یک تساوی لگاریتمی بنویسید.

$$\bullet 2^3 = 8$$

$$\bullet 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$\bullet 4^{\frac{5}{2}} = 32$$

$$3 = \log_2^8$$

$$-2 = \log_3^{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{5}{2} = \log_4^{32}$$

۲- تساوی‌های زیر را به یک تساوی نمایی تبدیل کنید.

$$\bullet \log_{10} \frac{1}{10} = -1$$

$$\bullet \log_8 16 = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49} = -4$$

$$-1 = \log_{10} \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{3} = \log_8 16$$

$$-4 = \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49}$$



۳- حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$\bullet \log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{3}} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{3}} = \frac{\log 2^{\frac{1}{3}}}{\log 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{3} \log 2}{\frac{1}{2} \log 2} = \frac{2}{3}$   
 $\bullet \log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{81} = \log_{3^{-3}} 3^{-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$   
 $\bullet \log_{\sqrt[4]{2}} 2^{\sqrt{2}} = \log_{2^{\frac{1}{4}}} 2^{\sqrt{2}} = \frac{\log 2^{\sqrt{2}}}{\log 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{2} \log 2}{\frac{1}{4} \log 2} = 4\sqrt{2}$   
 $\bullet \log_5 125 + \log \sqrt{1000} = 3 + \frac{1}{2} \log 1000 = 3 + \frac{1}{2} \log 10^3 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$   
 $\bullet \sqrt[3]{\log_2 2} = \sqrt[3]{1} = 1$   
 $\bullet \log_4 1 + \log_4 2 = \log_4 2 = \frac{1}{2}$

۴- با فرض  $\log 2 = 0/3$ ،  $\log 3 = 0/5$  و  $\log 7 = 0/8$ ، مقدار عددی عبارتهای زیر را به دست آورید.

$\bullet \log_{\sqrt{28}} 28 = \log_{28^{\frac{1}{2}}} 28 = \frac{\log 28}{\log 28^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 2^2 \cdot 7}{\frac{1}{2} \log 2^2 \cdot 7} = \frac{2 \log 2 + \log 7}{\frac{1}{2} (2 \log 2 + \log 7)} = 2$   
 $\bullet \log 21 + \frac{1}{2} \log 25 = \log 3 + \log 7 + \log 5 = 0/5 + 0/8 + 0/7 = 2$   
 $\bullet \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0/5}{0/3} = \frac{5}{3}$   
 $\bullet \log_{\sqrt[3]{18}} 18 = \frac{\log 18}{\log 18^{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 2 \cdot 3^2}{\frac{1}{3} \log 2 \cdot 3^2} = \frac{3 \log 2 + 2 \log 3}{\frac{1}{3} (3 \log 2 + 2 \log 3)} = 3$

۵- در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{3}{2} + \log_2(7x+2)$

مقدار  $f(2)$  را به دست آورید.  
 $f(2) = \frac{3}{2} + \log_2 14 = \frac{3}{2} + \log_2 7 + 1 = \frac{5}{2} + \log_2 7 = \frac{11}{2}$   
 نمودار  $f$  خط  $y = \frac{5}{2}$  را با چه طولی قطع می کند؟  
 $\frac{5}{2} = \frac{3}{2} + \log_2(7x+2) \rightarrow 1 = \log_2(7x+2) \rightarrow 2 = 7x+2 \rightarrow 7x=0 \rightarrow x=0$

۶- نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = a + \log_{\frac{1}{2}}(x+b)$  محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول  $\frac{5}{2}$  قطع می کند. اگر نمودار  $f$

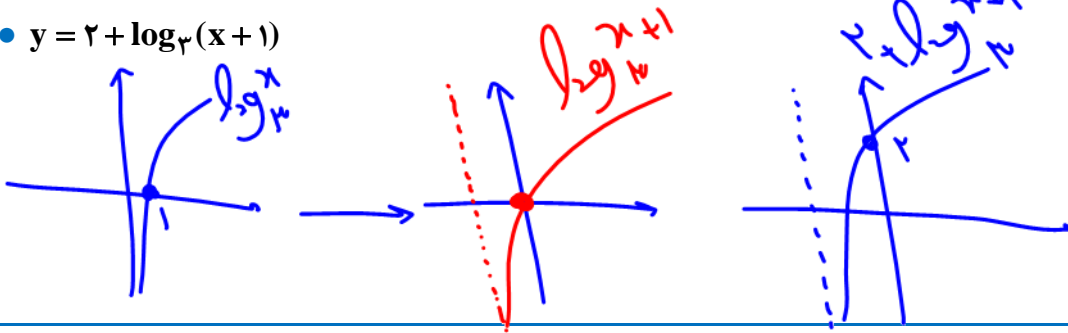
از نقطه  $(1, 2)$  بگذرد، مقادیر  $a, b$  را به دست آورید.

$f(\frac{5}{2}) = 0 : a + \log_{\frac{1}{2}}(\frac{5}{2} + b) = 0$   
 $f(1) = 2 : a + \log_{\frac{1}{2}}(1 + b) = 2$   
 $\frac{2}{1} = \frac{a + \log_{\frac{1}{2}}(\frac{5}{2} + b)}{a + \log_{\frac{1}{2}}(1 + b)} \rightarrow 2 + 2b = 0 \rightarrow b = -1$   
 $\frac{2}{1} = \frac{a + \log_{\frac{1}{2}}(\frac{5}{2} - 1)}{a + \log_{\frac{1}{2}}(1 - 1)}$  (undefined)  
 $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{5}{2} + b) - \log_{\frac{1}{2}}(1 + b) = -2 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{5/2 + b}{1 + b} = -2$



۷- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

•  $y = 2 + \log_3(x+1)$



۸- هر یک از معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

•  $\log_3(\Delta x - 1) = 2 \rightarrow \Delta x - 1 = 9 \rightarrow \Delta x = 10 \rightarrow x = 11 \checkmark$

•  $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5 \rightarrow \log_x(x^2 + 4) - \log_x 5 = 1 \rightarrow \log_x \frac{x^2 + 4}{5} = 1 \rightarrow \frac{x^2 + 4}{5} = x \rightarrow x^2 + 4 = 5x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ or } x = 4 \checkmark$

•  $\log(x-2) + \log(x-4) = 2 \log 4$

$\log(x-2) + \log(x-4) - \log 4 = 0 \rightarrow \log \frac{(x-2)(x-4)}{4} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 4x + 8}{4} = 1 \rightarrow x^2 - 4x + 8 = 4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

۹- اگر بزرگی یک زمین لرزه برابر ۶/۲ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر است؟

$\log E = 11.1 + 1.5M \rightarrow \log E = 11.1 + 1.5 \times 6.2 \Rightarrow \log E = 10.1 \rightarrow E = 10^{10.1}$

۱۰- تکثیر نوعی از باکتری با ۱۰۰ عدد آغاز شده و هر نیم ساعت هر باکتری به دو قسمت تقسیم می شود. بعد از چند دقیقه از آغاز تکثیر، تعداد آن ها به ۶۰۰ باکتری می رسد؟ ( $\log 3 \approx 0.48, \log 2 \approx 0.3$ )

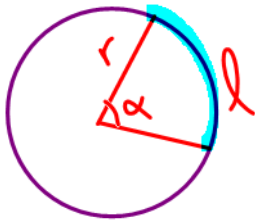
دفعات تقسیم پذیری

$100 \times 2^t = 600 \rightarrow 2^t = 6 \rightarrow t = \log_2 6$   
 $t = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log 3 + \log 2}{\log 2} = \frac{0.48 + 0.3}{0.3} = \frac{0.78}{0.3} = \frac{78}{30} = \frac{13}{5} = 2.6 \text{ min}$

### رادیان و درجه

رابطه تبدیل رادیان و درجه به هم:  $\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{d}{r}$

$30^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{30}{r} \rightarrow r = \frac{\pi}{3}$       $45^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{45}{r} \rightarrow r = \frac{2\pi}{3}$       $60^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{60}{r} \rightarrow r = \frac{\pi}{3}$   
 $27^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{27}{r} \rightarrow r = \frac{20\pi}{9}$       $135^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{135}{r} \rightarrow r = \frac{4\pi}{3}$       $225^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{225}{r} \rightarrow r = \frac{4\pi}{3}$   
 $\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{r} = \frac{90}{r} \rightarrow r = \frac{180^\circ}{\pi}$       $\frac{\pi}{12} = \frac{180^\circ}{r} = \frac{15}{r} \rightarrow r = \frac{180^\circ}{\pi}$       $\frac{\pi}{8} = \frac{180^\circ}{r} = \frac{22.5}{r} \rightarrow r = \frac{180^\circ}{\pi}$

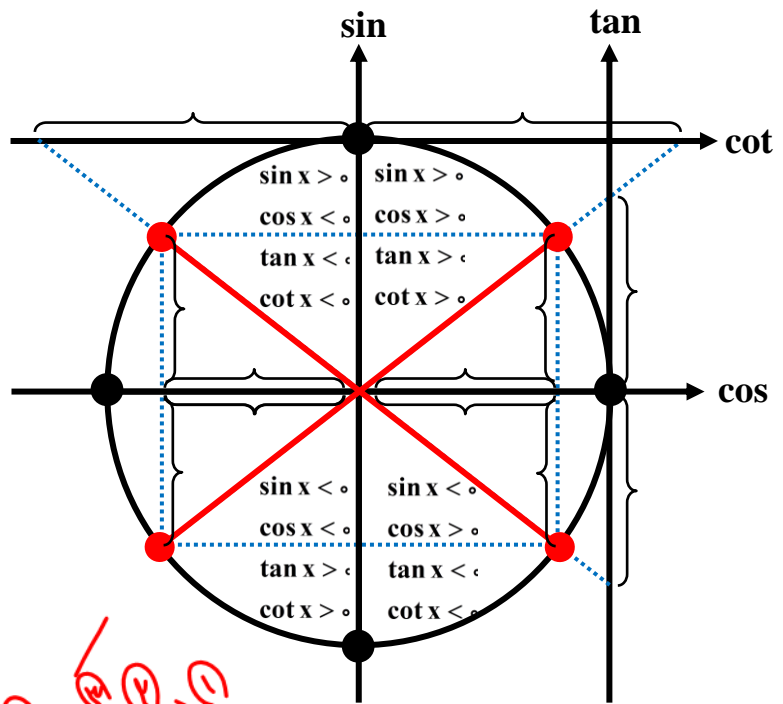


رابطه طول کمان مقابل به زاویه مرکزی  $l = \alpha r$

که رادیان

دایره مثلثاتی

	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
sin	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tan	0	تن	0	تن
cot	تن	0	تن	0



۱) سینوس  
 ۲) کسینوس  
 ۳) تانژانت  
 ۴) کاتانژانت

۱۱- در هر قسمت، شعاع دایره،  $\alpha$  اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی و  $I$  طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی  $\alpha$  می‌باشد. مقدار مجهول را به دست آورید.

•  $\alpha = ? , r = 50 \text{ cm}, I = 2 \text{ m}$

$$l = \alpha r \Rightarrow \frac{2}{100} = \alpha \times \frac{50}{100} \rightarrow \alpha = \frac{4}{50} \text{ rad}$$

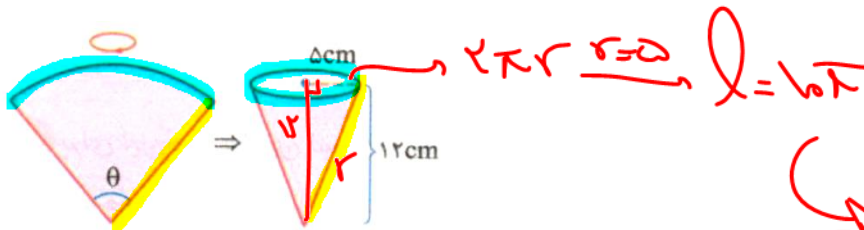
•  $r = ? , I = 20 \text{ cm}, \alpha = 4$

$$l = \alpha r \rightarrow 20 = 4r \rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

•  $I = ? , r = 4 \text{ m}, \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$$l = \alpha r \rightarrow l = \frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3} \text{ m}$$

۱۲- به کمک قسمتی (قطاعی) از یک دایره مخروطی ساخته‌ایم. اگر شعاع قاعده مخروط  $5 \text{ cm}$  و ارتفاع آن  $12 \text{ cm}$  باشد، زاویه مرکزی این قطاع چند رادیان است؟



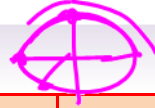
$$r^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow r = 13$$

$$l = \alpha r$$

$$10\pi = \alpha \times 13$$

$$\alpha = \frac{10\pi}{13}$$

### انتقال زوایا



<p>مضارب فرد: جنس عوض نمیشه تعیین علامت تابع اولیه</p>	<p>مضارب زوج: <math>\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}</math> جنس عوض میشه تعیین علامت تابع اولیه</p>	<p>زاویه قرینه: کسینوس: منفی خوار بقیه: سوراخ زار</p>
<p><math>\cos(\pi + x) = -\cos x</math> <math>\sin(\pi + x) = -\sin x</math> <math>\tan(\pi - x) = \tan(\pi - x) = -\tan x</math></p>	<p><math>\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x</math> <math>\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x</math> <math>\tan(\frac{5\pi}{2} - x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x</math></p>	<p><math>\cos(-x) = \cos x</math> <math>\sin(-x) = -\sin x</math> <math>\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x</math> <math>\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x</math></p>

مضارب زوج  $\pi$ : دور رنج هست.

۱۳- حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

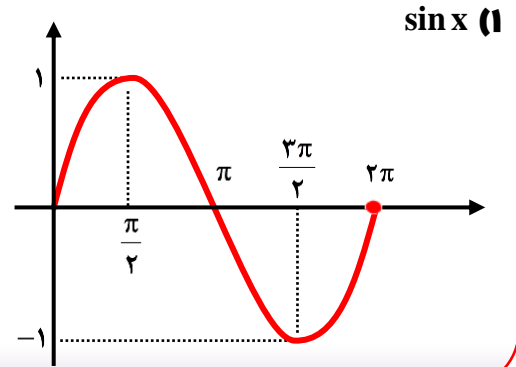
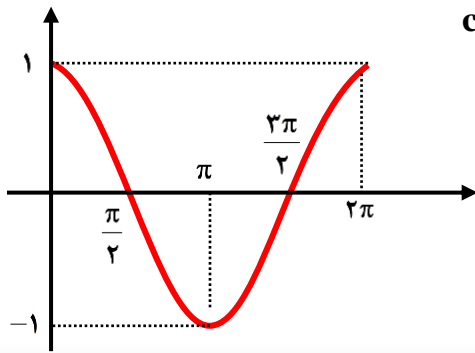
•  $\cot 135^\circ + \sin 150^\circ + \cos 225^\circ = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$   
 $\cos(180 - 45) = -\cos 45 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$      $\cos(270 - 30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$   
 $\sin(180 - 30) = +\sin 30 = \frac{1}{2}$

•  $\sqrt{2} \sin(-\frac{5\pi}{4}) + \cot(\frac{11\pi}{4}) - 2 \cos(-\frac{4\pi}{3}) = 1$   
 $-\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = -(\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4})) = +\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4}) = 1$   
 $\cot \frac{11\pi}{4} = \cot(\frac{11\pi - \pi}{4}) = \cot(\frac{10\pi - \pi}{4}) = \cot(\frac{9\pi - \pi}{4}) = \cot(\frac{8\pi - \pi}{4}) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$

۱۴- اگر  $\tan \theta = 2$  باشد، مقدار عددی عبارت  $\frac{2 \cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{3 \sin(\frac{5\pi}{2} + \theta) + \cos(\frac{9\pi}{2} - \theta)}$  را به دست آورید.

$$\frac{-2 \sin \theta + \cos \theta}{-3 \sin \theta - \cos \theta} \div \frac{-2 \tan \theta + 1}{-\tan \theta - 1} = \frac{-2 \tan \theta + 1}{-\tan \theta - 1} = \frac{-2 + \frac{1}{\tan \theta}}{-\tan \theta - 1} = \frac{-2 + \frac{1}{2}}{-2 - 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-3} = \frac{1}{2}$$

### نمودار توابع مثلثاتی

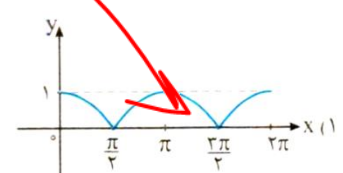
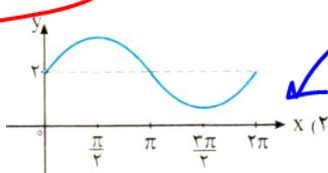
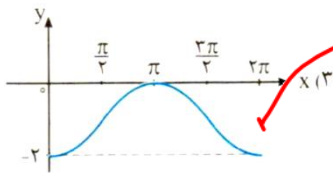


۱۵- با توجه به نمودارهای داده شده، مشخص کنید هر یک از نمودارها دارای کدامیک از ضابطه‌های داده شده هستند؟

•  $y = |\cos x|$

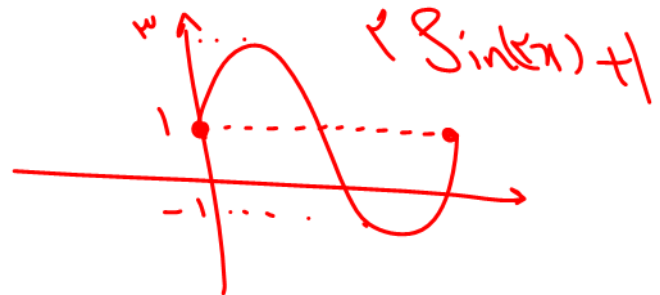
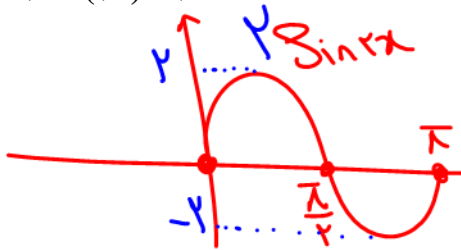
•  $y = -\cos x - 1$

•  $y = \sin x + 2$

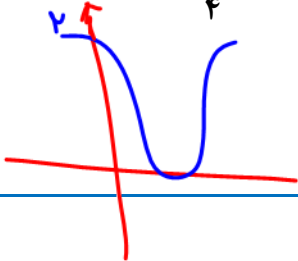


۱۶- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید؟

•  $y = 2 \sin(2x) + 1$



•  $y = \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 1$



۱۷- بیشترین و کمترین مقدار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

•  $y = 4 \cos(x + \frac{\pi}{6}) - 1$

$-5 \leq y \leq 3$

•  $y = |\cos x| + 2$

$2 \leq y \leq 3$

### روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

۱۸- اگر  $\alpha, \beta$  زاویه‌هایی در ربع سوم باشند، به طوری که  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$  و  $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقادیر زیر را حساب کنید.

•  $\sin(\alpha + \beta)$

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$-\frac{4}{5} \times \frac{-5}{13} + \frac{-12}{13} \times \frac{-3}{5} = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$$

•  $\cos(\alpha - \beta)$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{-3}{5} \times \frac{-5}{13} + \frac{-2}{5} \times \frac{-12}{13} = \frac{15}{65} + \frac{24}{65} = \frac{39}{65}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{14}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\frac{144}{169} + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{25}{169}$$

$$\rightarrow \cos \beta = \pm \frac{5}{13} \rightarrow \cos \beta = -\frac{5}{13}$$

۱۹- اگر  $\alpha$  زاویه‌ای در ربع دوم باشد، به طوری که  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

•  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

•  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{14}{25} - \frac{9}{25} = \frac{5}{25}$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

۲۰- نسبت‌های هر یک از زوایای زیر را بیابید.

•  $15^\circ \left(\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow 15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

## حد و محاسبه آن

حد تابع  $f(x)$  در نقطه  $a$  زمانی وجود دارد که:

(۱) حد راست موجود باشد

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l; \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

(۲) حد چپ موجود باشد

(۳) حد چپ و حد راست با هم برابر باشند

برای محاسبه حد توابع دارای اعمال جبری، میتوان از روابط زیر استفاده کرد:

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

در محاسبه حد کسرهای گویا (مورد چهارم) اگر صورت و مخرج یک کسر گویا همزمان صفر حدی شوند، در این حالت باید عامل صفرشونده (عامل تجزیه شده ای که محل حد گیری ریشه آن عامل است  $(x-a)$ ) را از صورت و مخرج ساده کنیم

برای محاسبه حد در توابعی که پیوسته هستند میدانیم مقدار تابع در نقطه  $a$  با حد آن تابع در آن نقطه برابر است. پس ابتدا خود عدد  $a$  را در تابع قرار میدهیم مگر یکی از شرایط زیر وجود داشته باشد:

(۱) درون براکت عدد صحیح شود

(۲) درون قدر مطلق صفر شود

(۳) لب مرز دامنه تابع باشیم

(۴) لب مرز تابع چند ضابطه بیوفتیم

این توابع میتوانند پیوسته نباشند لذا اگر در تابع یکی از شرایط بالا رخ دهد باید از تعریف اصلی حد استفاده کنیم و با تفکر چپ و راستی به محاسبه حد آن تابع پردازیم





۲۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$  در نقطه  $x=0$  حد دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+a)^2 = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

۲۵- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x}{x^2 + 2x} = \frac{-4}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4+3x} \quad \text{تعریف شده}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-4} = \frac{5}{-2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{2x+3} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 8}{x^2 - 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x-2} = \frac{12}{-4} = -3$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + [x]}{3x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{3x^2 + 5x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(3x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{3x+2} = \frac{-1-1}{-3+2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos^2 x} (1 + \sin x)}{\cancel{\cos^2 x} (1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 2$$

$$\sin x + \cos x = 1 \quad 1 - \sin x = \cos x$$

### پیوستگی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

یک تابع زمانی پیوسته است که:

(۱) تابع در آن نقطه حد داشته باشد (حد چپ و راستش برابر باشد)

(۲) تابع در آن نقطه تعریف شده باشد. پس در **بسته غرض** ... که تابع تعریف نشده است قطعاً پیوسته نیست

۲۶- تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2b & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ x + a & x < 0 \end{cases}$  مفروض است.  $b, a$  را چنان بیابید که تابع در  $x = 0$  پیوسته باشد.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + 2b) = 2b$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a$   
 $f(0) = 1$

$a = 1$   
 $2b = 1 \rightarrow b = 1/2$

۲۷- پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & x \neq 1 \\ -3 & x = 1 \end{cases}$  را در  $x = 1$  بررسی کنید.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$

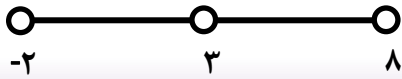
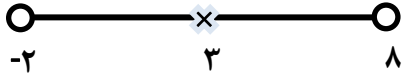
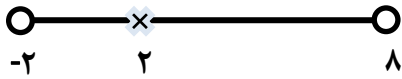
$f(1) = -3$

۲۸- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  پیوسته است؟

$a = 1/2$



### همسایگی



همسایگی است  
همسایگی چپ  
همسایگی زده، بسته

$(-1, 3)$

$(-2, 1) \cup (3, 8)$  یا  $\{3\}$   
همسایگی مزدف ۳

۲۹- اگر بازه  $(2x-1, x+3)$

• یک همسایگی از نقطه ۱ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای  $x$  کدام است؟

$2x-1 < 1 < x+3$

$2x-1 < 1 \rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$

$1 < x+3 \rightarrow -2 < x$

$(-2, 1)$

• یک همسایگی راست از نقطه ۱ باشد، همسایگی چه کدام عدد است؟

$(1, 4)$  :  $2x-1=1 \rightarrow x=1$

