



مجموعه آموزشی سگو

نزاره ← خبری
 فقط درست یا فقط نادرست

همی مساوی ها و همی نامساوی

نزاره
 5 > 3 نزاره هست / ن
 4 < 5 نادرست
 7 > 2 درست

جمله	گزاره هست یا نیست
هر متوازی الاضلاع شامل ۳ قطر می باشد.	هست، زیرا یک جمله خبری با ارزش نادرست است.
چه پیراهن خوش رنگی!	نیست، زیرا یک جمله عاطفی است.
این جا آشپز کیست؟	نیست، زیرا یک جمله پرسشی است.

به هم مساوی خبری که دارا ارزش درستی
 یا نادرستی باشد



$$P \vee Q = N \rightarrow P \wedge Q = N$$

$0 = 1 + 2$ دورینه صحتی داد (0) $1 = 2$ یا $2 = 1$ یا $3 = 1$ یا $3 = 2$ است
 $P = N$ $Q = 1$

اگر $0 = 1 + 2$ دورینه صحتی داشته باشد آنده $1 = 2$ یا $2 = 1$ یا $3 = 1$ یا $3 = 2$ است.
 P Q

$P \Rightarrow Q = N$ $P \Leftrightarrow Q = N$
 100 مربع کامل باشد آنده 5 عدد اول است.
 P Q

ترکیب	نماد	مفهوم
فصلی	$p \vee q$	p یا q
عطفی	$p \wedge q$	p و q
شرطی	$p \Rightarrow q$	اگر p آن گاه q
دو شرطی	$p \Leftrightarrow q$	p اگر و تنها اگر q یا اگر p آن گاه q و برعکس



اندکی نادرست باشد
کل ترکیب نادرست
است.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

اگر قیاسی درست باشد کل ترکیب
درست است.

همواره درست است

ن $\Rightarrow$ د

$p \vee q$

فقط وقتی (ن)
است که هر دو
گزاره (ن) باشند.

$p \wedge q$

فقط وقتی (د)
است که هر دو
گزاره (د) باشند.

$p \Rightarrow q$

فقط وقتی (ن)
است که گزاره
اول (د) ولی
دومی (ن) باشد.

$p \Leftrightarrow q$

فقط وقتی (د)
است که هر دو
گزاره هم‌ارزش
باشند.



ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

ضاد

نقیض گزاره p را به صورت $\sim p$ می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. نحوه به دست آوردن نقیض ترکیب گزاره‌ها مطابق جدول زیر است:

گزاره	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
نقیض	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \Leftrightarrow q$

P : ۱۸ مردی زوج است
 $\sim P$: ۱۸ مردی زوج نیست!

$$\begin{aligned} & \sim(P \Rightarrow q) \\ & \sim(\sim P \vee q) \\ & \equiv P \wedge \sim q \end{aligned}$$

اگر $0 < x < 1$ ~~آن گاه~~ $x^2 < x$

$0 < x < 1$ $\wedge$ $x^2 \geq x$

حاصل $\sim(P \Rightarrow q)$ بدون جدول به دست می‌آید:
 $\sim(\sim P \vee q) = P \wedge \sim q$



تبدیل ترکیب
سه می به فصل

$$\bigcirc \Rightarrow \triangleright \equiv \sim \bigcirc \vee \triangleright$$

خود دومی یا نفیض اولی

$\sim(\sim p) \equiv p$	۱
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	۲
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	۳
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	۴
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	۵
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	۶
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$	۷
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$	۸
$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	۹

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

حاصل
اینگونه $\neg p \wedge (p \wedge q)$ است.

$$(\sim p \wedge p) \wedge q$$

حاصل عبارت زیر را بدون جدول بیابید؟
 $(\sim q \vee p) \vee q = (\sim q \vee q) \vee p \equiv \triangleright$

حاصل $p \vee q$ ، $\sim p \Rightarrow q$ است.

حاصل $\neg p \vee q$ ، $\neg(p \wedge \neg q)$ است.



$$P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
>	>	>	ن	>
>	ن	ن	ن	ن
ن	>	>	>	>
ن	ن	>	>	>

$$P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
>	>	>	>	>	>
>	ن	ن	ن	>	ن
ن	>	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	>	>	>

نمایش گزاره‌های زیر را بنویسید؟

① $\frac{1}{x} > 2$ $\Leftrightarrow x > 0$ $y = x$ $\Leftrightarrow$ y هانی باشد $\Leftrightarrow$ x اند $\Leftrightarrow$ x اند

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

$$y = x \Leftrightarrow y$$
 تابع هانی است و $\frac{1}{x} \leq 2$

② $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}$ عددی اول است $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}$ عددی اول نیست

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$



$$P \vee F = P$$

$$\begin{matrix} \text{د} \\ \text{د} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \text{ن} \\ \text{ن} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{د} \\ \text{ن} \end{matrix}$$

چندهم ارزی پر کاربرد دیگر را هم در جدول زیر ببینید:

$p \vee p \equiv p$	$p \vee \sim p \equiv \text{د}$	$p \vee \text{ن} \equiv p$	$p \vee \text{د} \equiv \text{د}$
$p \wedge p \equiv p$	$p \wedge \sim p \equiv \text{ن}$	$p \wedge \text{ن} \equiv \text{ن}$	$p \wedge \text{د} \equiv p$
$p \Rightarrow p \equiv \text{د}$	$p \Rightarrow \text{ن} \equiv \sim p$	$p \Rightarrow \text{د} \equiv \text{د}$	$\text{د} \Rightarrow p \equiv p$
$p \Leftrightarrow p \equiv \text{د}$	$p \Leftrightarrow \sim p \equiv \text{ن}$	$p \Leftrightarrow \text{د} \equiv p$	$p \Leftrightarrow \text{ن} \equiv \sim p$

ارزش $(P \Rightarrow Q) \wedge F$ ، F است.

ارزش $(P \Rightarrow Q) \vee F$ ، $P \Rightarrow Q$ است.

ارزش $(\sim P \wedge Q) \Rightarrow T$ ، $\sim P \wedge Q$ است.

ارزش $\sim(P \wedge \sim P) \Rightarrow (Q \vee \sim Q)$ ، $\sim(P \wedge \sim P)$ است.

بدون جدول ثابت کنید

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \equiv T$$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

$$(\sim P \vee \sim Q) \vee P \equiv \text{د}$$



$$\sim(P \wedge q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow q)$$

$$\sim(\text{د} \wedge \text{ن}) \Rightarrow (\text{د} \Leftrightarrow \text{ن}) \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{ن}$$

$$(P \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Leftrightarrow \sim P)$$

$$(\text{د} \Rightarrow \text{ن}) \wedge (\text{ن} \Leftrightarrow \text{ن}) \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{ن}$$

اگر p گزاره درست و q $\sim$ درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در صورت امکان ارزش گزاره زیر را تعیین کنید.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

$$(\text{د} \wedge \text{ن}) \Rightarrow \text{ن} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{د}$$

$$(P \wedge q) \wedge r \equiv (\text{د} \wedge \text{ن}) \wedge \text{ن} \equiv \text{ن} \wedge \text{ن} \equiv \text{ن}$$

$$\sim(P \Rightarrow q) \Leftrightarrow (P \vee r)$$

$$\sim(\text{د} \Rightarrow \text{ن}) \Leftrightarrow (\text{د} \vee \text{ن}) \equiv \text{ن} \Leftrightarrow \text{د} \equiv \text{ن}$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

P	q	$P \vee q$	$\sim(P \vee q)$	$\sim P$	$\sim q$	$\sim P \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

مقدمه

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

$\sim$	$(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$
>	>	>	ن
>	ن	ن	>
ن	>	ن	>
ن	ن	>	ن

با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
>	>	>	>	>	>
>	>	ن	ن	ن	ن
>	ن	>	>	>	>
ن	>	>	>	>	>
ن	ن	>	>	>	>
ن	>	ن	ن	>	ن
ن	ن	ن	>	>	ن



① $\frac{1}{x} > x$ $D: \mathbb{R} - \{0\}$

اعداد بین صفر تا یک
آنها به یکدیگر بر میگردند از خودشان است

$(x+2)(x+3)=0$

② $x^2 + 5x + 6 = 0$ $D: \mathbb{R}$

$x = -2$
 $x = -3$
 $S = \{-2, -3\}$ ✓

③ درجه تب ناس $P(x) = \frac{1}{x}$

$S: x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $D: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثبت > 0
منفی < 0

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$

گزاره‌نما

هر گزاره‌ای که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر دارای ارزش درست یا نادرست است.

مجموعه جواب گزاره‌نما

دامنه گزاره‌نما

مجموعه مقادیری از دامنه که به ازای آنها، گزاره‌نما دارای ارزش درست است.

مجموعه مقادیر مجاز برای متغیرهای یک گزاره

سورها

وجودی

$\exists x; P(x)$

یعنی به ازای برخی از مقادیر دامنه، گزاره‌نمای $P(x)$ درست است.

عمومی

$\forall x; P(x)$

یعنی به ازای همه مقادیر دامنه، گزاره‌نمای $P(x)$ درست است.

همه اعداد صحیح، مربع‌شان مثبت است

یعنی از اعداد صحیح، مجموع‌شان با هم برابر مساوی 2 است.



$$\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow$$

نقیض هر یک از سورهای عمومی و وجودی به صورت جدول زیر است:

$\exists x; P(x)$	$\forall x; P(x)$	سور
$\forall x; \sim P(x)$	$\exists x; \sim P(x)$	نقیض سور

نقیض قنطاول ←
کمی ← وجودی
وجودی ← کمی

نقیض قنطاول دوم!



$$\sim P: \exists x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$

ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هریک را بنویسید.

$$\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$$

$$P = \text{ن}$$

$$P: \forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$$\exists y \in \mathbb{R} (y < 0 \wedge y^2 \leq 1)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \vee y^2 > 1$$

$$Q: \forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P \quad n=5 \quad Q = \text{ن}$$

$$\sim Q: \exists n \in \mathbb{N} (2^n + 1) \notin P$$

$$R: \exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0 \quad R = \text{ب}$$

$$\sim R: \forall y \in \mathbb{R}, \frac{y - 3}{5} \neq 0$$

$$S: \forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$$

$$\sim S: \exists x \in (-\infty, 0), x - \frac{1}{x} > -2$$

$x = -1 \rightarrow -1 - (-\frac{1}{-1}) = 0$

تعداد زیرمجموعه‌ها:

③ 2^n

- ① $\emptyset \subseteq A$
 ② $A \subseteq A$

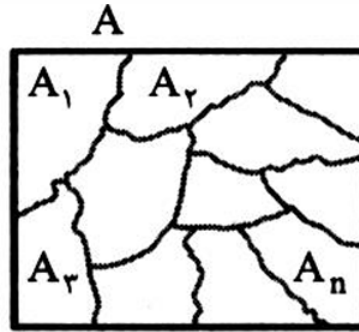
زیرمجموعه‌ها:

$A = \{a, b, c\}$

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

~~$\{a, b, c\}$~~



فرض کنید A یک مجموعه ناتهی و $A_1, A_2, \dots, A_n$ و ... زیرمجموعه‌های آن باشند. می‌گوییم مجموعه A به n زیرمجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشند:

❶ $\forall 1 \leq i \leq n; A_i \neq \emptyset$ (هیچ کدام از مجموعه‌ها $\emptyset$ نباشن)

❷ $\forall i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset$ (اشتراک هر دو زیرمجموعه دلتواوه باید $\emptyset$ باشد)

❸ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$ (اجتماع همه زیرمجموعه‌ها بشه خود A)

* زیرمجموعه‌های پاره‌ای محض:
 آن‌ها از زیرمجموعه‌ها خود مجموعه‌ها
 حذف کنیم، زیرمجموعه‌های محض
 تولید می‌شود!
 $2^n - 1$

* آن‌ها که از افرازهای مجموعه‌ای A باشند این مجموعه‌ها نیز زیرمجموعه‌های محض را دربردارند.
 $A = \{a, \{a\}, b, \{b\}\}$
 $A = \{a, \{a\}, b, \{b\}\}$

$\rightarrow 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$



$$0 = 1 \quad 0 \leq 1 \wedge 1 \leq 0$$

μ: $A - B = \emptyset$

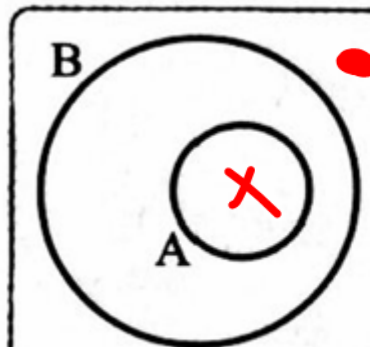
○ $\subseteq A-B$ سے دائرہ

فرض: $A \subseteq B$

اذا كانت ثابتة كنه $A-B \subseteq \emptyset$

$$A - B = \{ \forall x \in A \wedge x \notin B \} \xrightarrow{A \subseteq B} \{ \forall x \in B \wedge x \in B' \} = \emptyset$$

اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، در این صورت:



$$A \cup B = \bar{B}$$

$$A \cap B = A$$

$$A - B = \emptyset$$

$$B' \subseteq A'$$

$$\underline{A \subseteq B} \Rightarrow \underline{B' \subseteq A'} \checkmark$$

$$A' = \{4, 5\} \quad B' = \{5\} \quad \checkmark$$

④ فرض: $A \subseteq B$,
 مطلوب: $B' \subseteq A'$

$$\forall x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \rightarrow x \in A'$$

$$\forall x \in B' \Rightarrow \forall x \in A' \Rightarrow B' \subseteq A'$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$$\forall x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} \forall x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} \forall x \in C$$

$$\neg \exists x \in A \Rightarrow \forall x \in C \Rightarrow A \subseteq C$$



$$2^n = 512$$

$$2^2 \times 2^7 = 2^9$$

اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

$$h \text{ عضو } \rightarrow 2^n$$

$$n-2 \text{ عضو } \rightarrow 2^{n-2}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$2^n - 384 = 2^{n-2}$$

$$2^n - 2^{n-2} = 384$$

$$\left(2^n - \frac{2^n}{2^2} = 384 \right) \times 4 =$$

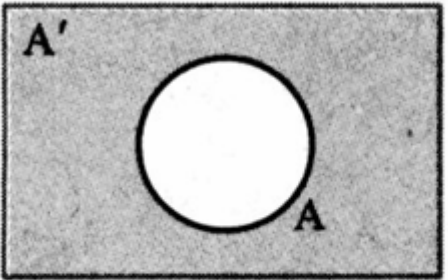
$$4 \times 2^n - 2^n = 4 \times 384$$

~~$$3 \times 2^n = 4 \times 384$$~~

$$2^n = 4 \times 128$$

$$2^n = 2^9 \rightarrow \boxed{n=9}$$

اگر A یک مجموعه دلخواه، U مجموعه مرجع و A' متمم مجموعه A باشد، قوانین زیر برقرارند:

	$5 \quad A \cup A' = U$	$6 \quad A \cap A' = \emptyset$
	$7 \quad A \cup U = U$	$8 \quad A \cap U = A$



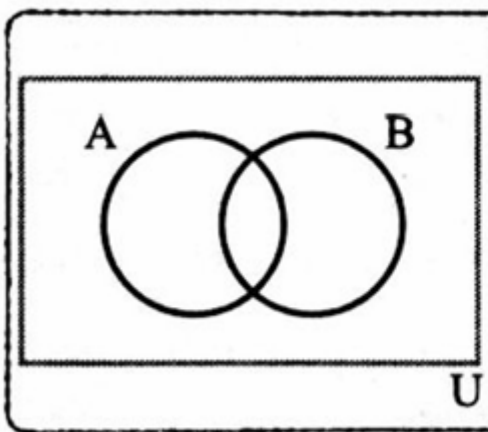
① بیرون با توکلی

جذب

$$\textcircled{9} (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$$

② کلماتها فرق

اگر A و B دو مجموعه دلخواه و A' و B' متممهای آنها باشند، داریم:



$$\textcircled{9} A \cup (A \cap B) = A$$

$$\textcircled{10} A \cap (A \cup B) = A$$

دو طرف

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

$$A - B = B' - A'$$

$$\textcircled{10} (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$$

$$A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A \checkmark$$

$$A \cap B' - B' \cap A = B' - A'$$

* حاصل عبارت $B' \cup (A \cap B')$ ، B' است.

حاصل عبارت $(A' - B')'$ ، $A \cup B'$ است.

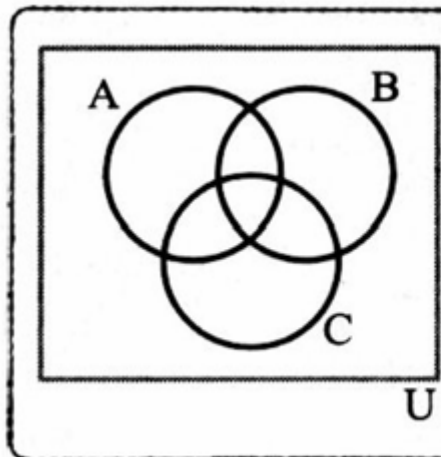
$$(A' \cap B)' = A \cup B'$$

$x + (x + 3)$

توزیع پذیری (بغلشی)

اگر A، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، روابط زیر را داریم:

$(A \cup B) \cup C$



$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

این دو امت‌ها یکی باشند
 می‌توانیم آن‌ها را با هم بگیریم

توزیع پذیری

$A \cap A' \cap B = \emptyset$

حاصل $A \cap (A' \cap B)$ ، $\emptyset$ است.



$$U \rightarrow V$$

$$\cap \rightarrow \wedge$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap (B \cap C) = \forall x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

طبق ترتیب بندی در مجموعه ها

$$\xrightarrow{\text{مجموعه ها}} (\forall x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$$
$$\Rightarrow (A \cap B) \cap C$$

با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\forall x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

یعنی در مجموعه ها

$$\xrightarrow{\text{مجموعه ها}} (\forall x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$(A \cap B) \cup [(B \cup C) \cap ((B \cup A) \cap B)] = (A \cap B) \cup B = B$$

جذب

جذب

$(B \cup C) \cap B = B$

$$[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = B$$

$$(A \cup B) \cap A' = (A \cap A') \cup (B \cap A') = B \cap A'$$

$\emptyset$

$$(B \cap A') \cup (A \cap B)$$

$$B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B \checkmark$$

هریک از عبارتهای زیر را ساده کنید.

$$(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)$$

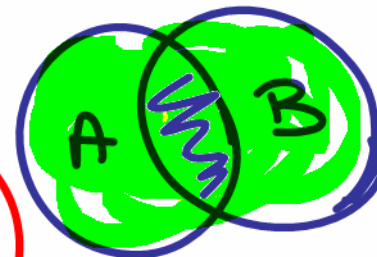
$$(B \cap A) \cap B$$

$$(A \cap B) \cap (B \cup A)$$

$$A \cap B$$

$$(A' \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$= B \cap (A' \cup A) = B \checkmark$$



نتیجه



اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که $B \subseteq A$ ، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A - B) \cup B = A$$

$$(A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (\underbrace{B' \cup B}_U) = \underbrace{A \cup B}_A = A$$



اگر A و B دو مجموعه باشند، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$(A \cap B') \cap (B \cap A') = \emptyset$$
$$\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}$$

~~$(A \cup B) - (A \cap B)$~~ $[(A \cup B) - (A \cap B)] \cup (A \cap B)$

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \end{array}$$

$$[(A-B) \cup (A \cap B)] \cup (B-A) = A \cup B$$

$$(\underline{A \cap B'}) \cup (\underline{A \cap B})$$

$$A \cup (B - A) = (A \cup B) \cap (A \cup A')$$

$$= A \cup B$$

$$A \cap (\underline{B' \cup B}) = A$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$(A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C')$$

$$= (A - C) \cup (B - C)$$

$$(A \cap C') \cup (B \cap C')$$

$$= (A \cup B) \cap C' = (A \cup B) - C$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$(A \cap B) \cap (A' \cup C') = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] = (A \cap B) \cap C'$$

$$= A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C)$$



$$(A-B)' = (A' \cup B)$$

$$(A \cap B')' = A' \cup B \quad \checkmark$$

$$A \ominus (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$$

$$\begin{aligned} & A \cap (B' \cap C') \\ & (A \cap B') \cap (A \cap C') \\ & (A-B) \cap (A-C) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} & (A \cap B') \cap (A \cap C') \\ & = A \cap (B' \cap C') = A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C) \end{aligned} \right.$$



$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$(A \cap B') \cup (B \cap A') = \underbrace{[(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']}_{(A \cup B) \cap (B' \cup B)} \underbrace{[(A \cap B') \cup A']}_{(A \cup A') \cap (A' \cup B')}$$

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$$

$$\underbrace{[(A \cup B) \cap A']}_{(A \cap A') \cup (B \cap A')} \underbrace{[(A \cup B) \cap B']}_{(A \cap B') \cup (B \cap B')} = \emptyset$$

$$(A' \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$$

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \cap (A' \cup B') \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$



 $A \times B$ (x, y)

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{-1, 0\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$n(A \times B) = n(B \times A)$$

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (3, -1), (3, 0)\}$$

$$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

$$A = [-1, 4)$$

$$A \times B = [-1, 4) \times (-2, 3]$$

$$B = (-2, 3]$$

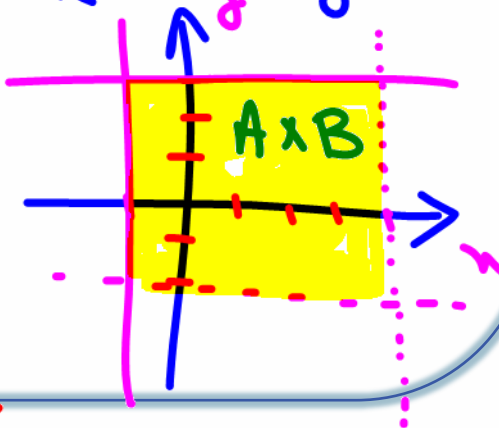
$$-1 < x < 4$$

$$-2 < y < 3$$

$$B \times A = (-2, 3] \times [-1, 4)$$

$$-2 < x < 3$$

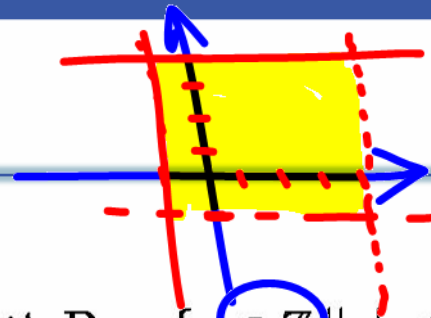
$$-1 < y < 4$$



مثال	نمودار حاصل ضرب	ضرب
$\{1, 2\} \times \{1, 3\}$ $= \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$		مجموعه $\times$ مجموعه عددی نقطه
$\{1, 3\} \times [0, 2]$		مجموعه $\times$ بازه تعدادی پاره خط عمودی
$[0, 3] \times \{1, 2\}$		بازه $\times$ مجموعه تعدادی پاره خط افقی
$(1, 3] \times [1, 2]$		بازه $\times$ بازه سطح مربعی یا مستطیلی


 $A^2 = A \times A = [-1, 4) \times [-1, 4)$

$-1 \leq x < 4 \quad -1 \leq y < 4$



اگر $A = \{x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$ باشد، مجموعه $A^2 - (A \times B)$ را با اعضا نشان دهید.

$-A^2$

$-1 \leq x \leq 1$

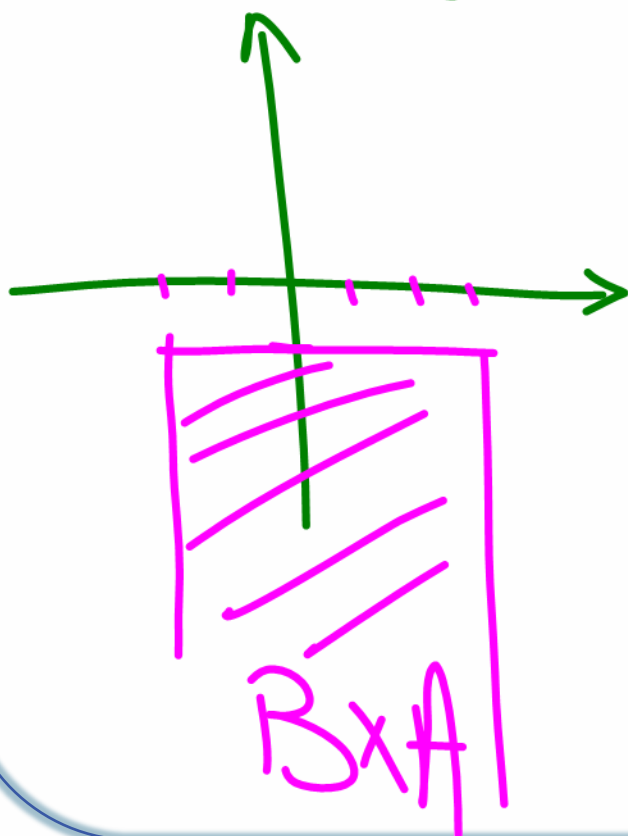
$x=1,2$

$B = \{-1, 0, 1\}$

$A = \{2, 4\}$

$\{(2, -1), (2, 0), (2, 1), (4, -1), (4, 0), (4, 1)\}$

اگر $A = (-\infty, -1]$ و $B = [-2, 3]$ باشد، نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید.



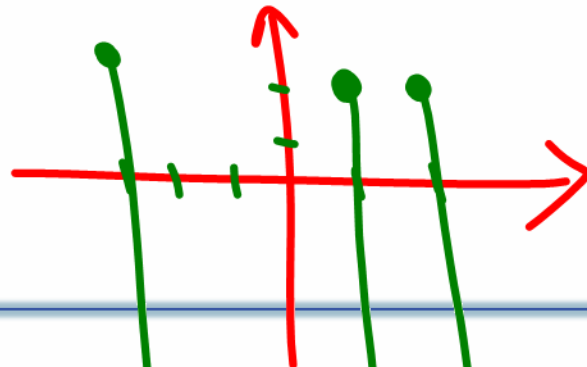
$$A = \{1, 2, -3\}$$

$$A \times B = \{1, 2, -3\} \times (-\infty, 2]$$

$$x=1, y \leq 2$$

$$x=2, y \leq 2$$

$$x=-3, y \leq 2$$



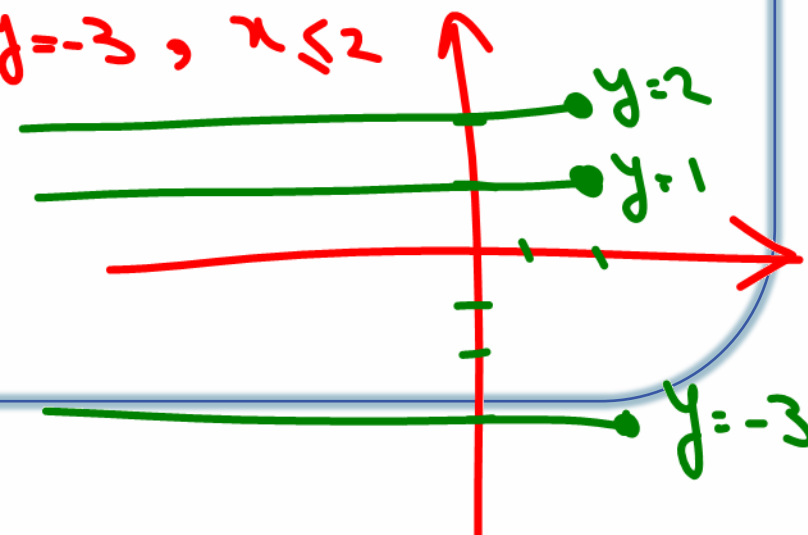
$$B = (-\infty, 2]$$

$$B \times A = (-\infty, 2] \times \{1, 2, -3\}$$

$$y=1, x \leq 2$$

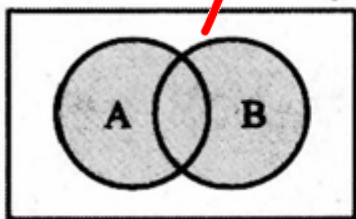
$$y=2, x \leq 2$$

$$y=-3, x \leq 2$$



دست کم / لا اقل / حداقل / دست کم

احتمال این که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ بدهد:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نتیجه برای پیشامدهای ناسازگار A و B (پیشامدهایی که هیچ برآمد

مشترکی ندارند، یعنی $A \cap B = \emptyset$) داریم:

$$P(A \cup B) \stackrel{P(A \cap B) = 0}{=} P(A) + P(B)$$

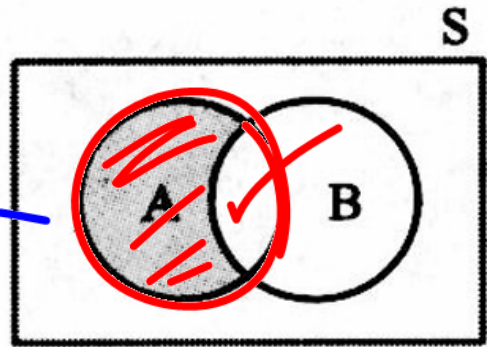


فقط A

احتمال این که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد (فقط A رخ بدهد):

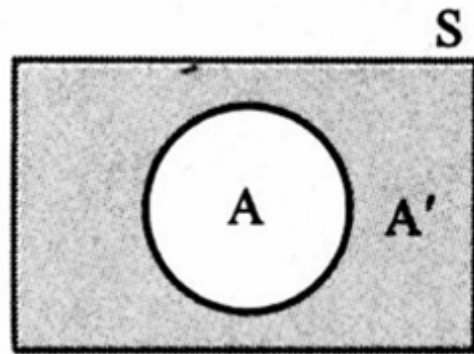
$$P(A) - P(B)$$

* A به ندوی B بنده *



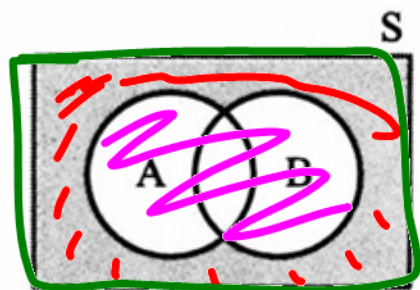
$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

اگر تنها یک پیشامد A را داشته باشیم، احتمال این که A رخ ندهد برابر است با:



$$P(A') = 1 - P(A)$$

احتمال این که هیچ یک از پیشامدهای A و B رخ ندهند:



$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

$B \cap A^c$



$A \rightarrow 5$
 $B \rightarrow 3$

تعداد حالات خوانده شده
 احتمال:
 تعداد کل حالت ها

عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۵ بخش پذیر باشد ولی بر ۳ بخش پذیر نباشد.

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

نکته: هرگاه بخواهیم بفهمیم چند
 عدد از آن داریم که بر ۳ بخش پذیر
 است:
 $\left[\frac{n}{k} \right]$

$$= \frac{\left[\frac{1000}{5} \right]}{1000} - \frac{\left[\frac{1000}{15} \right]}{1000} = \frac{134}{1000}$$

پاسخ: برای سهانه دن
 اشتراک به بین دو عدد
 معرج مشترک بگیریم!

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $A \subseteq B$ ثابت کنید:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

اندازی از آت 300
عددی که از بین $\{500, 200, \dots, 201, 200\}$ انتخاب می‌کنیم به‌صورتی
نه صند 4 آت و نه صند 6.
 $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

4 صند $\rightarrow A$
6 صند $\rightarrow B$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \checkmark$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{\cancel{75} \left[\frac{300}{4} \right] + \cancel{50} \left[\frac{300}{6} \right] - \cancel{25} \left[\frac{300}{12} \right]}{300} = \frac{100}{300}$$

نکته: اگر گفت متناسب به جلوی هر کدام به ضریب k بزار!

در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده شدن هر عدد، متناسب با مربع همان عدد است.

اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد اول مشاهده شود چقدر است؟

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$1k + 4k + 9k + 16k + 25k + 36k = 1$$

$$\Rightarrow 91k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{91}$$

$$\begin{aligned} &P(2) + P(3) + P(5) \\ &= 4k + 9k + 25k = 38k \\ &= \frac{38}{91} \end{aligned}$$

فردا بداد متناسب:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$$

$$1k + \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{5}k + \frac{1}{6}k = 1$$

تاسی، تاسی اول و وقوع هر عدد اول به برابر عدد دیگر اول است با کدام احتمال تاس مضرب 3 می آید؟



$$P(\text{تاس اول}) = 3P(\text{تاس مضرب 3}) = 3x$$

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$x + 3x + 3x + x + 3x + x = 1$$

$$P(3) + P(6) = 3x + x = 4x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است.

اگر A پیشامد وقوع عددی کمتر از پنج باشد، احتمال وقوع پیشامد A چقدر است؟

$$P(\text{زوج}) = 2P(\text{فرد}) = 2x$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1$$

$$9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$= x + 2x + x + 2x$$

$$= 6x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \checkmark$$

در یک تجربه تصادفی $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هریک از برآمدها را به دست آورید.

$(3, 7, 11)$
 $7-4, 7, 7+4$

$P(z), P(y), P(x)$
 $\frac{1}{3}P(y) - \frac{1}{4}, P(y), P(y) + \frac{1}{4}$
 $\rightarrow \frac{7}{12}$

$$P(y) - \frac{1}{4} + P(y) + P(y) + \frac{1}{4} = 1$$

$$3P(y) = 1 \Rightarrow P(y) = \frac{1}{3}$$



آمار
ایمان ساریخانی