



مجموعه آموزشی سگو



$$2 \times 0 + 1$$

$$2 \times 0 = \text{زوج}$$

$$2k+1+2q+1$$

$$= 2k+2q+2 = 2(k+q+1) = 2k'$$

$$k = n(n+1)$$

$$4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

$$5k / 5q / 5 \times \text{cloud}$$

$$7k \quad 7q \quad 7 \times \text{cloud}$$

(۲) اگر k ضرب دو عدد متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

$$k+k+1+k+2+k+3+k+4$$

$$= 5k+10 = 5(k+2) = 5q$$

$$k+k+1+k+2+k+3+k+4+k+5+k+6$$

$$7$$

$$(n-1)n$$

$$n(n+1)$$

$$m(m+1)$$

$$x(x+1)$$

استدلال استنتاجی

گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(۱) مجموع دو عدد فرد، فرد است.

زوج

(۳) مجموع ۵ عدد متوالی مضرب ۵ است.

* مجموع n عدد متوالی n است (فرد)

(۴) میانگین ۷ عدد متوالی، همان عدد وسط است.

$$= \frac{7k+21}{7} = k+3$$



$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 + b^2$$

$$b = 2q + 1 \Rightarrow (2k+1)^2 + (2q+1)^2$$

$$4k^2 + 4k + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 2(k^2 + 2k + 2q^2 + 2q + 1) = 2k'$$

$$(2k+1)^3 - (2q+1)^3$$

$$= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 8q^3 - 12q^2 - 6q - 1 = 2(k^3 + 2k^2 + 3k - q^3 - 2q^2 - 3q)$$

$$(2k+1)^2 = 8q+1$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$$

$$x = 3k \Rightarrow 3k(3k+3) = 3k \times 3(k+1) = 9k(k+1) = 9 \times 2q = 18q$$

$$2k(2k+2)(2k+4)$$

$$2k \times 2 \times (k+1) \times 2(k+2)$$

$$8k(k+1)(k+2) = 8 \times 6q = 48q$$

هر دو عدد فرد باشند
متوالی زوج است *

(۵) اگر $a.b$ فرد باشد آنگاه $a^2 + b^2$ زوج است.

(۶) تفاضل مکعبات دو عدد فرد عددی زوج است.

(۷) مربع هر عدد فرد مضرب ۸ بعلاوه یک است.

(۸) اگر x مضرب ۳ باشد آنگاه $x(x+3)$ مضرب ۱۸ است.

(۹) ضرب ۳ عدد زوج متوالی مضرب ۴۸ است.

* مضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۶ است *

* مضرب n عدد متوالی مضرب $n!$ است *



$$2 \times \text{cloud} + 1$$

(۱) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

زوج $n = 2k$

$$4k^2 - 10k + 7$$

$$2 \sqrt{9} + 1 = 2 \times 3 + 1$$

فرد $n = 2k + 1$

$$(2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7$$

$$= 4k^2 - 6k + 3$$

$$= 2(2k^2 - 3k + 1) + 1 = 2 \times 3 + 1$$

مثال نقض

برای هر یک از عبارتهای زیر مثال نقض بزنید.

$$\sqrt{9+4} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4}$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (1)$$

$$x = -5$$

$$y = 2$$

$$|-3| = |-5| + |2|$$

$$|x+y| \neq |x| + |y| \quad (2)$$

$$[x+y] = [x] + [y] \quad (3)$$



$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$$

(۴) مجموع دو عدد گنگ همواره گنگ است.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

(۵) ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

(۶) ضرب سه عدد گنگ همواره گنگ است.



641

$n=5$

(۷) $2^{2^n} + 1$ همواره عدد اول است.

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \times \dots$$

$n=6$

$$2^6 + 1 = 65 \times$$
$$2^6 - 1 = 63 \times$$

(۸) $2^n + 1$ یا $2^n - 1$ همواره اول هستند.

برهان خلف

هر یک از گزاره‌های زیر را از طریق برهان خلف ثابت کنید:

① n^2 فرد: فرض
 n فرد: حکم
 $n \neq 2k+1$ فرض خلف

$$n^2 \neq 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow n^2 \neq 2q+1 \quad \times$$

اگر n^2 فرد باشد، n نیز فرد است.
 چون به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

② مجموع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ است.

$$x + y = \text{گنگ} \Rightarrow y = \text{گنگ} - x \Rightarrow y = \text{گنگ} \quad \times$$

③ اگر f تابعی پیوسته و g ناپیوسته باشد $f + g$ ناپیوسته است.

$$f + g = \text{پیوسته} \Rightarrow g = \text{پیوسته} - f \Rightarrow g = \text{پیوسته} \quad \times$$

ناپیوسته g و پیوسته f : فرض

ناپیوسته $f + g$: حکم

پیوسته $f + g$: فرض خلف



۴) اگر α و β دو عدد گنگ باشد ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ ، $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

فرض: α گنگ، β گنگ، $\alpha + \beta$ گویا

حکم: $\alpha + 2\beta$ گنگ

فرض خلف: $\alpha + 2\beta =$ گویا

$$\alpha + \beta + \beta = \text{گویا} \Rightarrow \beta = \text{گویا} - (\alpha + \beta)$$

$$\beta = \text{گویا} - \text{گویا} = \text{گویا}$$

فرض: $\alpha - \beta =$ گویا

$$\alpha + \beta - 2\beta = \text{گویا}$$

$$-2\beta = \text{گویا} - (\alpha + \beta)$$

$$\beta = \frac{\text{گویا} - \text{گویا}}{-2} = \text{گویا}$$



اثبات بازگشتی

$$\boxed{1) a + \frac{1}{a} \geq 2} \quad (a > 0) \xrightarrow{\times a} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow \underbrace{a^2 - 2a + 1}_{\text{انتقاد ص.ع}} \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

$$\checkmark 2) a + \frac{1}{a} \leq 2 \quad (a < 0)$$

$$3) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq 2 \quad (x, y > 0) \xrightarrow{\times x \cdot y} x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 2xy}_{(x-y)^2} \geq 0$$



در تب کسره واسطه‌ی صابی بین دو عدد از واسطه‌ی
هذی یان هابنزرگه یا مساوی است.

$$۴) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

$$\xrightarrow{\times 2} a+b-2\sqrt{a \cdot b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a^2 - 4ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (2a-b)^2 \geq 0$$

$$۵) x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

$$۶) x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2x - 2y - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 - 2x - 2y - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

$$۷) x^2 + y^2 + z^2 - 3 \geq 2(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 1 + 1 + 1 - 2x - 2y - 2z \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$$

① $20 = 5 \times 4$

② $5 \mid 20$

یاد می‌ماند
می‌تواند

$-5 \mid 20$

$5 \mid -20$

$-5 \mid -20$

$4 \mid 16$ ✓
 $16 \mid 4$ ✗

۵ مهربان ۵ است

بخش پذیری:

۳ ن صفر ~~بخش~~ های اعداد بخش پذیر است

۱) $a \mid b \rightarrow b = ak$

۲) $a \mid a$

۳) $1 \mid a$

۴) $a \mid 1 \rightarrow a = \pm 1$

۵) $a \mid 0$

۶) $0 \mid a \rightarrow a = 0$

۷) $a \mid b, a \mid -b, -a \mid b, -a \mid -b$

3 | 9 $\times 2 \rightarrow 3 | 18$ ✓

نمونه سوال:

حکمها و روابط زیر را ثابت کنید:

m مضرب a است

۱) $a | b \rightarrow a | mb \quad (m \in \mathbb{Z})$

$b = ak \xrightarrow{\times m} mb = a(mk) \Rightarrow mb = aq \Rightarrow a | mb$

مضرب a است

۲) $a | b, a | c \rightarrow a | mb \pm nc \quad (m, n \in \mathbb{Z})$

$a | b \Rightarrow b = ak \xrightarrow{\times m} mb = amk$
 $a | c \Rightarrow c = aq \xrightarrow{\times n} nc = anq \pm$

$mb \pm nc = a(mk \pm nq)$
 $k' = k \pm nq$

$mb \pm nc = ak'$
 $\Rightarrow a | mb \pm nc$

۳) $a | b \Leftrightarrow a | b^n$

$a | b \xrightarrow{\times b^{n-1}} a | b \times b^{n-1}$



$$a/b^n \checkmark$$

$$(3)/9 \rightarrow 27/9 \times$$

نمونه سوال:

$$۴) a | b \Leftrightarrow a^n | b^n$$

$$= 1 a^n - b^n$$

$$\rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n = a^n (q^n) k \rightarrow b^n = a^n k \rightarrow a^n | b^n$$

$$۵) a | b \Rightarrow a^m | b^n \quad m < n$$

$$a/b \Rightarrow a^4/b^2 \times$$



نمونه سوال:

دو رابطه‌ی غلط:

$$a \mid b + c \rightarrow a \mid b \text{ یا } a \mid c \rightarrow 7 \mid 3 + 4 \rightarrow 7 \mid 3 \times 7 \mid 4 \times$$

$$a \mid b \times c \rightarrow a \mid b \text{ یا } a \mid c$$
$$12 \mid 4 \times 3 \rightarrow 12 \mid 4 \times 12 \mid 3 \times$$



$$\frac{x^2 - 3}{\pm 1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 3 = -1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

نمونه سوال:

اگر $x^2 - 3 \mid 1$ چند مقدار طبیعی برای x داریم. کدام مقدار $x=2$



$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

اگر $x^3 + 4x^2 + 3x \mid 0$ باشد مقدار x کدام است؟

$$x^3 + 4x^2 + 3x \mid 0 \quad \checkmark$$

اگر $x \mid x+y$ ثابت کنید $x \mid y$.

$$\begin{array}{r} x \mid x+y \\ - \quad x \\ \hline x \mid y \end{array}$$



در حل این گونه از سوالات باید همیشه نسبت از بین برود

نمونه سوال:

حالا برای از بین بردن آن /

اگر $a \mid 4k + 3$ ، $a \mid 3k + 1$ ، مقادیر صحیح برای a را بیابید. باید مثل دستگاه معادلات!

$$a \mid 4k + 3 \xrightarrow{\times 3} a \mid 12k + 9$$

$$a \mid 3k + 1 \xrightarrow{\times 4} a \mid 12k + 4$$

$$\hline a \mid 5$$

$$a = \pm 1, \pm 5$$

$$a \mid 4k + 3 \xrightarrow{\times 3}$$

$$a \mid 6k + 2 \xrightarrow{\times 2}$$

اگر $a \mid 4k + 3$ ، $a \mid 6k + 2$ ، مقادیر صحیح برای a را بیابید.

$$a \mid 12k + 9$$

$$a \mid 12k + 4$$

$$\hline a \mid 5$$

$$a = \pm 1, \pm 5$$



$$m+2=26 \rightarrow m=24$$

$$m_2 = -26 \times$$

نمونہ سوال:

اگر دو عدد $5n + 3$ و $7n - 1$ بر $(m + 2)$ بخش پذیر باشند چند m طبیعی یافت می شود؟

چند III طبیعی یا کت می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} m+2 \mid 5n+3 \xrightarrow{\times 7} m+2 \mid 35n+21 \\ m+2 \mid 7n-1 \xrightarrow{\times 5} m+2 \mid 35n-5 \end{array} \right.$$

$$\pm 26 \quad \pm 13 \quad \pm 1 \quad m+2 \mid 26$$

$$m+2=1 \quad \times$$

$$m + 2 = -1 \quad \times$$

$$m+2=13 \longrightarrow m=11$$

$$m+2 = -13 \times$$

اگر $۵ \mid 4k + ۱$ ثابت کنید $۲۵ \mid ۱۶k^2 + ۲۸k + ۶$.

فرض

$5 \mid 4k+1$

25 | $16k^2 + 8k + 1$

25 | $20k + 5$

~~25 | $16k^2 + 28k + 6$~~

اگر $4 \mid 3k+1$ ، بت کنید $16 \mid 9k^2+18k+5$ خدا داد

$\xrightarrow{\times 4} 16 \mid 12k+4$ $\rightarrow 16 \mid 9k^2+18k+5$

اگر $6 \mid 5k+1$ و $36 \mid 25k^2+40k+m$ را بیابید.

$\xrightarrow{\times 6} 36 \mid 25k^2+10k+1$

$\xrightarrow{\times 6} 36 \mid 30k+6$ $\rightarrow 36 \mid 25k^2+40k+7$ $m=7$

$\begin{cases} 5n+4 \mid 17n-3 \\ 5n+4 \mid 5n+4 \end{cases}$

$\xrightarrow{\times 5} 17n-3$

$\xrightarrow{\times 17} 5n+4$

به ازای چند عدد صحیح $5n+4 \mid 17n-3$ برقرار است.

چند نقطه با مختصات صحیح روی تابع $y = \frac{3x-1}{x+2}$ قرار دارد؟

$x+2 \mid 3x-1$

$x+2 \mid (x+2) \times 3 \rightarrow x+2 \mid 3x+6$

$x+2 \mid 7$

$\frac{12}{2} \in \mathbb{Z} \leftarrow$ چون صورت به مخرج بخش پذیره

$\frac{12}{5} \notin \mathbb{Z}$



$$[18, 12] = 36 \quad 18 \quad 36 \quad 72 \quad \dots \quad | \quad 18$$

$$[a, b] = D \quad 12 \quad 24 \quad 36 \quad 48 \quad 72 \quad \dots \quad | \quad 12$$

$a|D, b|D$

$$a|b \rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$

کو صغیرین مضرب مشترک

$$(ب.م.م.) \text{ و } (گ.م.م.)$$

بزرگترین مضرب مشترک

$$18 \quad | \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 18$$
$$12 \quad | \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 12$$

$$(18, 12) = 6$$

$$(a, b) = d \rightarrow d|a, d|b$$



این دو عددی کامل مشترک ندارند - باید
یعنی ب.م.م آن ها 1 باشد یعنی آن دو عدد
نسبت به هم اولند.

$$(9, 25) = 1$$

$$3^2 \quad 5^2$$

تلم: $(m, m+1) = 1$

$$(m, m+1) = d$$

$$d \mid m+1$$

$$d \mid m$$

$$d \mid 1$$

ثابت کنید دو عدد متوالی نسبت به هم اولند

$$d = \pm 1 \xrightarrow{d > 0} d = 1$$

* حاصل $(3m+4, 3m+5)$ است.

حاصل هر یک از قسمت های زیر را به دست آورید.

$$1) [m^2, (m^3, m^5)] = [m^2, m^3] = |m^3|$$

$$2) (\Delta m + 1, \Delta m + 2) = 1$$



قضیه تقسیم

$a =$ مقسوم $b =$ مقسوم بر

$$\begin{array}{r} 67 \overline{) 65} \\ \underline{65} \\ 2 \end{array}$$

باقی مانده

خارج قسما

$$67 = 13 \times 5 + 2$$

$$a = bq + r$$

$$0 \leq r < b \Rightarrow r_{\max} = b - 1$$

$$7$$

$$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a + 6 = (b + 4)q + r - 2$$

$$a = bq + 1$$

نمونه سوال:

اگر در یک تقسیم، ۶ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییری نمی کند اما

از باقیمانده ۲ واحد کم می شود، خارج قسمت را بیابید.

$$\cancel{r} + \cancel{b}q + 6 = \cancel{b}q + 4q + \cancel{r} - 2$$

$$4q = 8 \rightarrow q = 2$$

باقیمانده اعداد a و b به ترتیب بر ۱۷ است با ۵ و ۷ باقیمانده‌ی تقسیم $3a - 2b$ را بر ۱۷ بیابید.

$$a \mid \frac{17}{k}$$

$$\Rightarrow a = 17k + 5 \xrightarrow{\times 3} 3a = 17 \times 3k + 15$$

$$\frac{5}{b \mid \frac{17}{q}}$$

$$\Rightarrow b = 17q + 7 \xrightarrow{\times 2} 2b = 17 \times 2q + 14$$

$$3a - 2b = 17(3k - 2q) + 1$$



$$3a - 2b = 17k' + 1$$

نمونه سوال:

نکته: اگر بایزده صغی‌تر بدون با مقسوم‌یه بهتر می‌کنی!

باقیمانده‌ی تقسیم عدد a بر 7 و 8 به ترتیب 4 و 5 است باقیمانده‌ی a را بر 56 بیابید.

$$\times 8$$



$$a \div 7 \rightarrow a = 7k + 4 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56k + 32$$

$$a \div 8 \rightarrow a = 8q + 5 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q + 35$$

$$a = 56(k - q) - 3 \rightarrow a = 56k' + 53$$

باقیمانده‌ی تقسیم عددی بر 6 و 9 به ترتیب 4 و 7 است باقیمانده‌ی تقسیم را بر 18 بیابید.

$$a = 6q + 4 \xrightarrow{\times 3} 3a = 18q + 12$$

$$a = 9k + 7 \xrightarrow{\times 2} 2a = 18k + 14$$

$$a = 18(9 - k) - 2 \rightarrow a = 18k' + 16$$

نمونه سوال:

فرد b | مزد

اگر a عددی فرد و $b | a + 4$ ، باقیمانده‌ی $a^2 + b^2 + 11$ را بر ۸ بیابید.
 می‌دانیم مربع هر عدد فرد ضرب ۸ به‌دراوه ۱ است.

مربع عدد فرد
 مربع عدد فرد

$$a^2 + b^2 + 11$$

$$8q + 1 + 8k + 1 + 11 = 8q + 8k + 8 + 5 = 8(k + q + 1) + 5 = 8q' + 5$$

$$\begin{array}{r} a \quad 5 \\ \hline k \end{array}$$

$r=0, 1, 2, 3, 4$

$a = 5k$
 $a = 5k + 1$ ✓ $a = 5k + 4$
 $a = 5k + 2$
 $a = 5k + 3$ ✓

$$3 | n(n-1)(n+1)$$

ثابت کنید رابطه‌ی $3 | n^3 - n$ برای هر عدد صحیح n برقرار است؟

$$n = 3k \rightarrow 3k(3k-1)(3k+1) = 3q$$

$$n = 3k+1 \rightarrow (3k+1)(3k)(3k+2) = 3(3k+1)k(3k+2) = 3q$$

$$n = 3k+2 \rightarrow (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3(3k+1)(k+1) = 3q \checkmark$$



$$6k \times$$

$$6k+1$$

$$6k+2 \times$$

$$6k+3 \times \rightarrow \text{مغرب 3}$$

$$6k+4 \times$$

$$6k+5$$

نمونه سوال:

ثابت کنید هر عدد اول بزرگتر از ۳ را می توان به صورت $4k+1$ ، $4k+3$ نوشت.
 * می دانیم که هر عدد اول بزرگتر از ۳، عددی فرد است پس تمام اعداد در تقسیم به ۴ به ۴ حالت زیر
 اعزاز می شوند:

$$a=4k \times$$

$$a=4k+1$$

$$a=4k+2 \times$$

$$a=4k+3$$

ثابت کنید اگر a عدد صحیح باشد همواره یکی از a یا $a+1$ یا $a+4$ بر ۳ تقسیم پذیر است.

نمونه سوال:

ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد متوالی و صحیح عددی فرد است.

$$(2k+1)^3 - (2k+3)^3$$

ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح و متوالی مضرب ۳! است.

$$n(n-1)(n+1) = 39$$

$$n = 3k \quad \text{---}$$

$$n = 3k+1 \quad \text{---}$$

$$n = 3k+2 \quad \text{---}$$

می‌دانیم ضرب یک عدد
متوالی زوج است پس حاصل
ثابت کنیم ضرب آن‌ها مضرب ۳
نیست.

هم نهشتی:

برابر بودن
عین هم بودن
مانند هم بودن
مثل هم بودن

$$\begin{array}{r}
 67 \overline{) 5} \\
 \underline{65} \\
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 102 \overline{) 5} \\
 \underline{100} \\
 2
 \end{array}$$

$67 \equiv 102 \equiv 97 \equiv 7 \equiv -3 \equiv -8$

$|a = 5q + 2| = -3$
 $= 5 \times (-1) + 2 = -3$

$$a \equiv b \iff m \mid a - b$$

$\textcircled{1} a \equiv b \rightarrow a^c \equiv b^c$
 $\Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c$
 $\Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c$

$a \equiv b$
 $c \equiv d$

نمونه سوال:

$1) 13^{1394} + 52^7 \equiv$
 $(-1)^{1394} + 3^7 \equiv 4$

باقیمانده هر یک از قسمت‌های زیر را به اعداد خواسته شده بیابید
 $45 \mid 13 + 53 \equiv 13 \times 2 \equiv 26 \equiv 9$
 $(13^2)^{17} \equiv (-1)^{17} \rightarrow 13 \equiv 1 \times 13 \equiv 13$
 $13^{45} \equiv 13$

$14 \rightarrow$ یک کم
 $13 \rightarrow$ 6 اضافه
 $7 \rightarrow$
 $13 \equiv -1 \equiv 6$

$2) 1000 \times 325 \equiv$
 $-1 \times 3 \equiv -3 \equiv 10$
 128

$(3^8)^{13} \equiv (1)^8 \rightarrow 3^{24} \equiv 1$
 $\times 3^1 \rightarrow 3^{25} \equiv 3$
 $1000 \equiv -1$
 $\equiv -1$
 $\equiv -1$

$3) 226 \times 5 \equiv$
 $(-32) \times 5 \equiv 55 \equiv 12$
 $(2^7)^{43} \equiv (-1)^3 \rightarrow 2^{21} \equiv -1 \xrightarrow{\times 2^5} 2^{26} \equiv -32 \equiv 11$



نمونه سوال:

اگر باقیمانده‌ی A بر 13 برابر 9 باشد، باقیمانده‌ی $A^2 - 2A$ را بر 13 بیابید.

$$(A)^2 - 2A \equiv 9^2 - 2 \times 9$$

$$\equiv 81 - 18 \equiv 63 \equiv -2 \equiv 11$$

$$A \equiv 9$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200! \equiv$$

$$1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 3$$

رقم یکان $1! + 2! + 3! + \dots + 200!$ را بیابید.

* اندک‌ترین رقم یکان

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! \dots \equiv 15$$

یعنی بر روی بقیه 15 باید



$$7a - 3 \stackrel{10}{=} 7 \times 7 - 3 \stackrel{10}{=} 46 \stackrel{10}{=} 6 \checkmark$$

نمونه سوال:

اگر رقم یکان اعداد $3a - 5$ و $4a + 8$ با هم برابر باشد، رقم یکان $7a - 3$ را بیابید.

$$4a + 8 \stackrel{10}{=} 3a - 5$$

$$a \stackrel{10}{=} -13 \stackrel{10}{=} 7$$

* وقتی که میله رقم یکان برابری دارد.
یعنی به یکان 10 به هم هستند است *

اگر شانزدهم آذر سالی سه شنبه باشد، چهاردهم اسفند همان سال چند شنبه است؟

سه شنبه
۱۶ آذر

$$14^0 + 30^2 + 30^2 + 14^0 \stackrel{7}{=} 4$$

۱۴ اسفند

فاصله ی دوروز داده شده را بر این
و بعد به اندازه ی بایزده به آن
آیزه خواست روبه جلو و آن روز
خواست روبه عقب صروی!



$$8x \equiv 20 \pmod{4} \rightarrow 2x \equiv 5 \pmod{4}$$

معادله هم نهشتی:

برای حل معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ کافی است انقضای نهشتی را بررسی کنیم.
 به سمت راست معادله می‌رویم و در آخر ضریب x را
 از بین ببریم: $x \equiv 2 \pmod{5} \xrightarrow{\div 3} 3x \equiv 6 \pmod{5} \xrightarrow{\text{یک اضافه}} 3x \equiv 1 \pmod{5}$

- ① قبل از هر کاری آن را به بررسی تقسیم می‌کنیم، حتماً تقسیم کن!
- ② بین آی می‌توانی اعدادت رو کم کن / کو صلیک کن / هم نهشتی رو بنویس!
- ③ در آخر به قضیه تقسیم تبدیل کن!



$$\begin{array}{r} 73 \overline{) 23} \\ \underline{69} \\ 4 \end{array}$$

$$(73)x \equiv 1 \xrightarrow{23} 4x \equiv 1$$

$$\cancel{4x \equiv 24}$$

$$\rightarrow x \equiv 6 \Rightarrow x = 23q + 6$$

نمونه سوال:

جواب کلی معادله $73x \equiv 1 \pmod{23}$ کدام است؟

$$3x - 13 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 13 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 6 \pmod{7} \xrightarrow{\div 3} x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x = 7q + 2 \Rightarrow q = 2, 3, \dots, 13$$

$$\text{مقادیر: } 13 - 2 + 1 = 12$$

نمونه سوال:

$$51x + 91 \equiv 0 \pmod{11} \rightarrow 51x \equiv -91 \pmod{11} \rightarrow 51x \equiv -10 \pmod{11} \rightarrow x \equiv -2 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{11}$$

معادله‌ی هم نهشتی $51x + 91 \equiv 0 \pmod{11}$ چند جواب کمتر از ۵۰ دارد؟

$$\rightarrow -4x \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv -2 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{11}$$

$$\rightarrow -x \equiv -9 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{11}$$

$$x = 11k + 9$$

$k = 0, 1, 2, 3$

$$9x \equiv 3 \pmod{12} \xrightarrow{\div 3} 3x \equiv 1 \pmod{4} \xrightarrow{\text{دو تا اضافه}} x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow x = 4k + 3$$

$$-x \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$



$$ax + by = C$$

معادل سیال :

① برای این کار x را به y تبدیل می‌کنیم و با y با عدد معلوم هم نهیست قرار بده یا برعکس

② با توجه به مجهول بدست آمده، آن را درون معادله‌ی اصلی قرار بده تا مجهول دیگری بدست آید.

③ اگر مقدار جواب خواست جواب‌های x و y را به معادله تبدیل کن و سپس این کارها را اشتراک بگیر!



$$6x \equiv 41$$

$$x \equiv 1 \rightarrow x = 5k + 1$$

$$6(5k + 1) + 5y = 41$$

$$5y = -30k + 35 \xrightarrow{\div 5} y = -6k + 7$$

نمونه سوال:

جواب عمومی معادله $6x + 5y = 41$ را بیابید.

$$15x \equiv 1050 \rightarrow x \equiv 70 \equiv 0 \rightarrow x = 14k$$

$$k > 0$$

اعداد جواب طبیعی $15x + 14y = 1050$ را بیابید.

$$15 \times 14k + 14y = 1050$$

$$14y = -15 \times 14k + 1050$$

$$\div 14 \rightarrow y = -15k + 75$$

$$k < 5$$

$$0 < k < 5$$

$$k = 1, 2, 3, 4$$



۱۵۰ ریال $\rightarrow x$ (تعداد)

$$150x + 250y = 3700$$

$$\div 5 \Rightarrow 3x + 5y = 74$$

۲۵۰ ریال $\rightarrow y$ (تعداد)

$$5y \equiv 74$$

$$xy \equiv x$$

$$y \equiv 1 \Rightarrow y = 3k + 1$$

$$x > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4$$

۵ طریق

$$\frac{-5k \pm \sqrt{23}}{-5}$$

نمونه سوال:

به چند طریق می توان با ۳۷۰۰ تومان تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ تومانی خرید.

$$3x + 5(3k + 1) = 74 \Rightarrow 3x = -15k + 69 \Rightarrow x = -5k + 23$$

$$k \leq \frac{23}{5}$$

به چند طریق می توان ۲۰۰ کیلو برنج را به صورت کیسه های ۳ و ۷ کیلویی بسته بندی کرد؟

$$3x + 7y = 200$$

$$3x + 7(3k + 2) = 200$$

$$3x = -21k + 186$$

$$\div 3 \Rightarrow x = -7k + 62 > 0$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

۵ عدد

$$7y \equiv 200$$

$$y \equiv 2 \Rightarrow y = 3k + 2$$



نظر جواب: $ax \equiv b \rightarrow (a, m) | b$

$$5x \equiv 11 \quad \times \quad (5, 6) | 11 \quad \times$$

نظر جواب:

بدل: $ax + by = c \Rightarrow (a, b) | c \quad \checkmark$

$$6x + 9y = 10 \quad \times$$



تعريف كراف



تعاریف اولیه گراف

نقطه ← رأس ← تعداد رأس ← مرتبه ← مجموعه‌ی رئوس

خط ← یال ← تعداد یال ← اندازه ← مجموعه یال

دو رأس مجاور به دو رأس که توسط یک یال به هم وصل شده باشند.

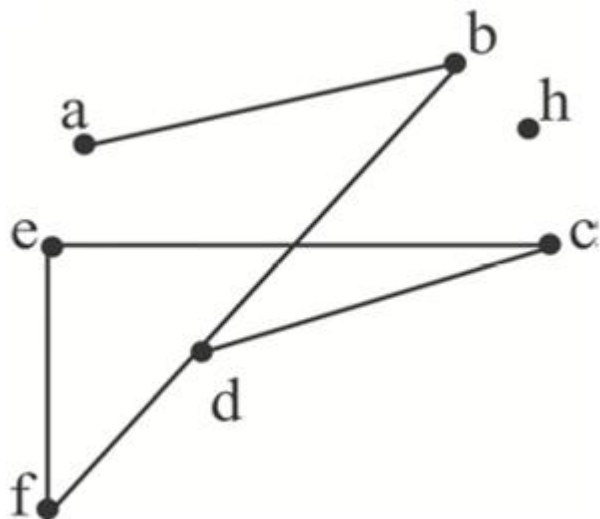
دو رأس همسایه: به دو رأس که توسط یک یال به هم وصلند.

همسایه بسته ←

همسایه باز ←

درجه: به تعداد یال‌های وصل شده به هر رأس درجه می‌گویند.





تعریف گراف ساده

جهت دار نباشد - طقه نداشته باشد - بین هر دو راس در اثر یک یال



قضیه بنیادین گراف‌ها بند ۱

مجموع درجات در هر گراف ساده برابر با دو برابر تعداد یال است.

قضیه بنیادین گراف‌ها بند ۲

در هر گراف ساده تعداد رئوس درجه فرد همواره‌ی عدد زوج است.

نمونه سوال:

جاهای خالی را پر کنید:

- (۱) به رأس که توسط یک یال به نودش وصل شده باشند را می‌گویند.
- (۲) به رأس که درجه‌ی آن صفر باشد می‌گوییم.
- (۳) درجه‌ی رأس منفرد است.
- (۴) اگر تعداد عضوهای مجموعه‌های همسایگی بسته‌ی رأس ۵ باشد درجه‌ی آن است.
- (۵) اگر تعداد مجموعه عضوهای مجموعه‌ی همسایگی باز هر رأس ۳ باشد درجه‌ی آن است.
- (۶) دنباله درجات رئوس یک گراف ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ است تعداد یال‌ها است.
- (۷) در هر گراف ساده مجموع درجات برابر تعداد یال‌هاست.

نمونه سوال:

گراف G با مجموعه رأس‌های $V(c) = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ فرض است اگر $|N_c(V_5)| = 4$ و مجموعه‌ی همسایگی $NG(V_i)$ برای $1 \leq i \leq 4$ تک عضوی باشد گراف G را رسم کنید.

آیا گرافی با درجات $5, 3, 3, 2, 2, 2, 0$ قابل رسم است؟ چرا؟

نمونه سوال:

گرافی که $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $E(G) = \{ab, fd, ca, de\}$ است را رسم کرده و مجموعه همسایگی باز رأس a را مشخص کنید و مقدار $2P - q + \Delta + 3\delta$ را بیابید.

گرافی با $|V(G)| = 6$ ، $|E(G)| = 5$ و $\Delta = 4$ رسم کنید این گراف چند رأس درجه ۲ دارد؟ (این گراف یک رأس تنها دارد.)



نمونه سوال:

گرافی دو رأس از درجه ۳، سه رأس از درجه ۴، و k رأس از درجه ۵ دارد. اگر تعداد یال‌ها این گراف ۱۴ باشد، مرتبه گراف کدام است؟

گرافی ۶ رأس رسم کنید که یک رأس تنها داشته باشد و بقیه رأس‌ها از درجه زوج باشد.



نمونه سوال:

گرافی با مجموع درجات ۲۸ اگر ۳ یال به آن اضافه کنید تعداد یال‌ها چقدر می‌شود؟

گراف منتظم: گرافی که درجات رئوس آن با هم برابر باشد.

مدل نمایش: r - منتظم مرتبه P

نکات گراف منتظم:

$$۱) r.P = ۲q \Rightarrow q = \frac{۲.P}{۲}$$

۲) فرد - منتظم مرتبه فرد نداریم

۳) گراف تهی $\rightarrow ۰$ - منتظم مرتبه P

$$۴) \delta = \Delta = r$$

نمونه سوال:

جاهای خالی را پر کنید:

- (۱) گراف ۶- منتظم مرتبه 10 ، یال دارد.
- (۲) در گراف ۳- منتظم مرتبه ۴، مجموع $\Delta + \delta$ ، برابر است.
- (۳) گرافی که تمام درجات آن صفر باشد را گراف می‌گوییم.
- (۴) یک گراف منتظم ۴۸ یال دارد اگر تعداد رئوس ۱۲ باشد درجه‌ی هر رأس است.



نمونه سوال:

آیا گراف ۵- منتظم مرتبه ۷ داریم؟ چرا؟

گراف کامل: به گرافی که تمام رأس‌ها به هم وصل شده باشند.

- به گرافی که تمام رئوس آن از درجه فول باشند.

- گراف $(P - 1)$ منتظم مرتبه P

مدل نمایش k_p



نکات گراف کامل:

$$۱) q = \frac{P(P-1)}{2}$$

$$۲) \delta = \Delta = P - 1$$

نمونه سوال:

جاهای خالی را پر کنید:

(۱) گرافی که تمام رئوس آن به هم وصل شده باشند را گراف می‌گویند.

(۲) در گراف K_7 ، درجه‌ی هر رأس است.

(۳) در گراف K_5 ، مجموعه همسایگی بسته هر رأس است.

(۴) گراف K_8 ، یال دارد.

(۵) گراف کاملی ۹۰ یال دارد، تعداد رئوس است.

(۶) گراف کاملی ۵۵ یال دارد، درجه‌ی هر رأس در این گراف است.

(۷) مینیمم درجه در هر گراف K_p ، است.

نمونه سوال:

یک گراف ۳ رأس غیرتهی K - منتظم بکشید که:

(۱) K بیشترین مقدار ممکن باشد؟

(۲) K کمترین مقدار ممکن باشد؟

یک گراف ۵ رأس غیرتهی K - منتظم رسم کنید که:

(۱) K بیشترین مقدار ممکن باشد؟

(۲) K کمترین مقدار ممکن باشد؟



نمونه سوال:

اگر G یک گراف ۳-منتظم باشد و $2P + 2 = 2q - 4$ آنگاه $P + q$ را بیابید؟

اگر ۳-منتظم از مرتبه P با اضافه شدن ۱۶ یال، به مجموعه یال‌هایش به گرافی کامل تبدیل شده است،
مرتبه آن کدام است؟



نمونه سوال:

با کاستن ۴۲ یال از تعداد یال‌های یک گراف کامل، ۴- منتظم تبدیل می‌شود، مرتبه آن کدام است؟

در یک گراف کامل $q = 3\Delta + \delta$ مجموعه مرتبه و اندازه را بیابید؟



نمونه سوال:

در یک گراف کامل رابطه‌ی $q = \Delta^2 - 2\delta$ برقرار است، مجموع مرتبه و اندازه کدام است؟



گراف کامل:

دور:



دو گراف مهم:

: P_n

: C_n



نمونه سوال:

گرافی با درجه رأس‌های ۲, ۲, ۲, ۲, ۴ چند دور دارد؟

گراف ۳- منتظم مرتبه ۶ چند دور به طول ۴ دارد؟



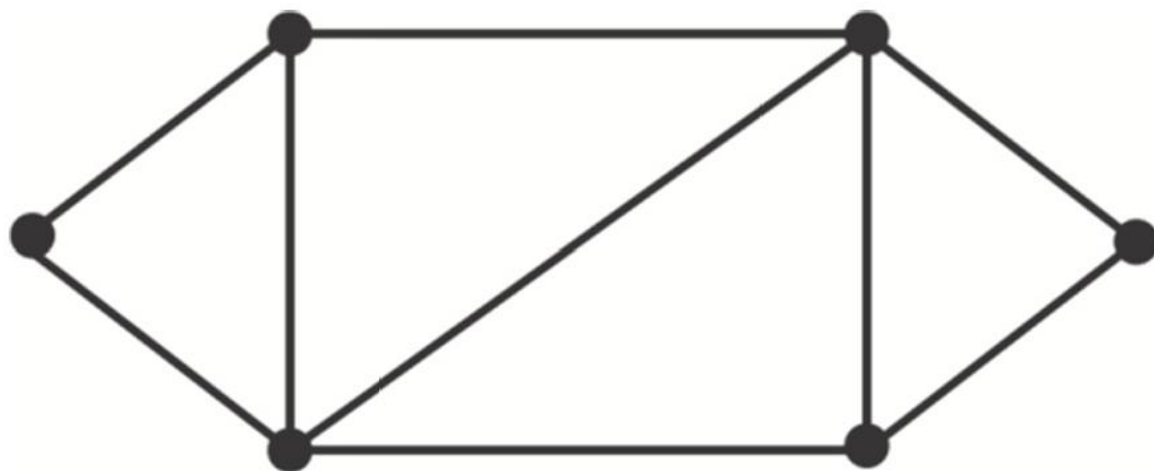
نمونه سوال:

گراف با درجه رأس‌های ۲, ۳, ۲, ۳, ۴ چندمین بین دو رأس با درجه‌ی δ دارد؟

گراف P_5 چند مسیر به طول ۵ دارد؟

نمونه سوال:

در گراف زیر تعداد دورها چقدر است؟





گراف مکمل

به کامل کننده یک گراف، گراف مکمل می گویند.

نکات گراف مکمل

$$۱) q + \bar{q} = \frac{P(P-1)}{2}$$

$$۲) \deg a_G + \deg a_{G'} = P - 1$$

$$۳) \Delta(G) + \delta(G') = P - 1$$

نمونه سوال: گرافی با $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ داریم اگر $N(b) = \{a, d, c\}$ ، $N(c) = \{d, b\}$ ، $N(d) = \{a, b, c\}$ باشد، گراف را رسم کنید و مکمل آن را نیز رسم کنید و $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ را نیز بیاید؟

نمونه سوال:

جاهای خالی را پر کنید:

(۱) در یک گراف ساده بیشترین درجه ۳ است. اگر گراف از مرتبه ۸ باشد کمترین درجه در مکمل این گراف است.

(۲) در یک گراف از مرتبه P ، $\Delta = 4$ و کمترین درجه در گراف مکمل ۲ است. گراف K_p ، یال دارد.

(۳) در یک گراف از مرتبه ۵ اگر گراف با اندازه ۴ باشد تعداد یال در مکمل گراف است.

(۴) در یک گراف از مرتبه ۸ ، اگر $N_G[a] = 3$ باشد درجه‌ی این رأس در گراف مکمل است.

(۵) مکمل C_8 گراف منتظم است.

(۶) مجموع درجات گراف G ، ۱۲ و مجموع درجات گراف $\overline{G}$ ، ۸ است. مرتبه‌ی این گراف است.



نمونه سوال:

اگر گراف G یک گراف ۲-منتظم و گراف G' یک گراف ۳-منتظم باشد، گراف G چند یال دارد؟

درجه‌ی رأس a در هر دو گراف G و G' برابر ۳ است، اگر گراف G ، ۱۰ یال داشته باشد، تعداد یال‌های گراف G کدام است؟



نمونه سوال:

در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۲ عضو است، اگر $\bar{q} = 3q$ باشد، مقدار $P(G)$ را بیابید؟

گراف همبند

$q_{\min}$ برای همبند:

$q_{\min}$ برای ناهمبند:

$q_{\max}$ برای همبند:

$q_{\max}$ برای ناهمبند:

نمونه سوال: کوچکترین اندازه‌ی گراف ساده که بین هر دو رأس آن مسیر داشته باشیم از مرتبه‌ی ۷ با $\Delta = 3$ را بیابید.



کسسته ایمان ساریخانی

www.sakkoo.ir

[t.m/Sakkoo_edu2](https://t.me/Sakkoo_edu2)