

بخش ۲: زیرمجموعه‌ها

در این بخش، مفاهیمی مهم در ارتباط با دو مجموعه بیان و بررسی می‌شود.

زیرمجموعه $\subseteq$

زیرمجموعه

دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. هر گاه هر عضو از مجموعه‌ی A در B هم قرار داشته باشد، یعنی:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

در این صورت گوئیم A «زیرمجموعه» B است و می‌نویسیم:

$$A \subseteq B$$

اگر این شرط برقرار نباشد، A زیرمجموعه‌ی B نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$

B



$$\star \in A$$

$$\star \in B$$

$$A \subseteq B$$

به نمونه‌های بعدی توجه کنید:

مثال: با توجه به مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ پاسخ دهید:

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

الف) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن عدد اول باشند.

$$B \subseteq A$$

پاسخ

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

ب) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مضرب ۲ باشند.

$$C \subseteq A$$

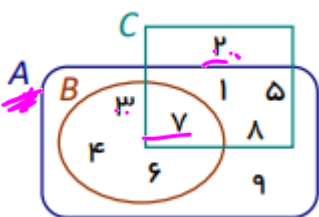
پاسخ

$$D = \{1, 4\}$$

ج) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مجذور کامل باشند.

پاسخ

مثال: سه مجموعه‌ی A , B و C را در نمودار ون روبرو ببینید.



الف) موارد زیر همگی درست هستند:

$$\{2, 7\} \subseteq C \text{ و } \{3, 7\} \not\subseteq C \text{ و } C \not\subseteq A \text{ و } B \subseteq A$$

ب) موارد زیر همگی نادرست هستند:

$$\{2, 7\} \subseteq A \text{ و } \{4, 7\} \not\subseteq B \text{ و } C \subseteq A$$

$$\{7\} \subseteq C$$

$$C \not\subseteq A$$

$$\{4, 7\} \subseteq B$$

$$\{2, 7\} \not\subseteq A$$

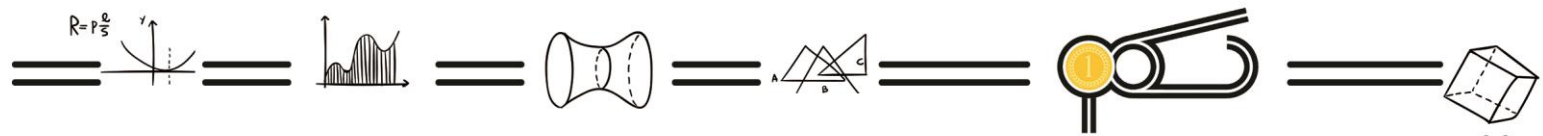
مثال: فرض کنید $A \not\subseteq B$ و عدد ۲ عضو مجموعه‌ی A باشد. آیا عبارت $2 \notin B$ صحیح است؟ چرا؟



$$2 \in B$$

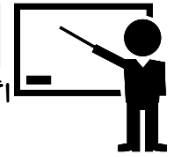


پاسخ



در ادامه‌ی استدلال مثال قبل:

توجه کنید:



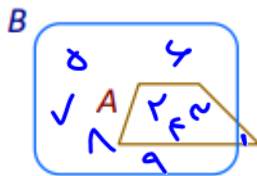
اگر بدانیم $A \not\subseteq B$ ، در این صورت به دو مطلب مهم زیر می‌توان اشاره کرد:

- ممکن است بسیاری از اعضای A در مجموعه‌ی B هم باشند؛ اما:
- لاقط یک عضو در A هست که در B قرار ندارد.

شکل مقابل را ببینید:

نمونه‌ای دیگر:

برای مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، چون $1 \in A$ است، ولی



$$A \not\subseteq B$$

ولی ۱ در B نیست

$$1 \notin B$$

نتیجه:

برای این دو مجموعه عبارت $A \not\subseteq B$ صحیح است. (ولی سایر عضوهای A در B هستند).

مثال: تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{2, a\}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} &\emptyset \\ &\{2\} \quad \{a\} \\ &\{2, a\} \end{aligned}$$

نتیجه:

چنان که در مثال قبل دیدیم، برای هر مجموعه‌ی A همیشه داریم:

▪ $A \subseteq A$ ؛ یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است.

▪ $\emptyset \subseteq A$ ؛ یعنی تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

گاهی برخی از اعضای یک مجموعه، خودشان نیز مجموعه هستند.

پای تخته

تمام زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3x - 5 = -2\}$ و $B = \{1, 2, \{3\}\}$ را بنویسید.

پاسخ:

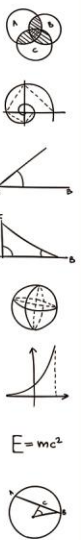
در ادامه مفهومی دیگر در ارتباط با دو مجموعه معرفی می‌شود:

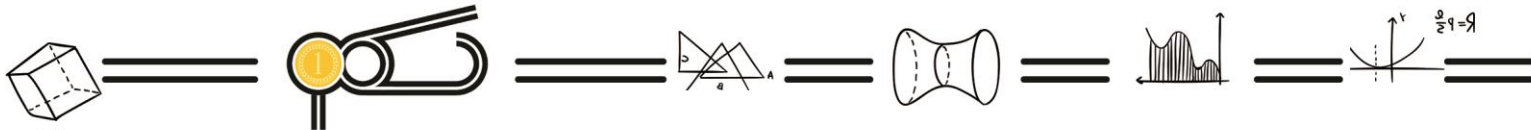
مجموعه‌های برابر



$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

هر گاه اعضای دو مجموعه‌ی A و B کاملاً یکسان باشند، یعنی:

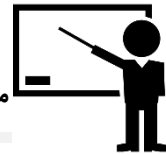




در این صورت، دو مجموعه را «برابر» یا «مساوی» گفته و می‌نویسیم:

$$A = B$$

توجه کنید:



مجموعه‌های A و B هنگامی برابرند که عبارت‌های $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هر دو درست باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A = B$$

نتیجه:

عبارت $A \neq B$ به این معنی است که: «لااقل یک عضو در یکی از دو مجموعه هست که در دیگری قرار ندارد.»

مثال: در جاهای خالی عددهای مناسب قرار دهید تا تساوی درست شود.

$$\left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{9}, -\frac{9}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{(-3)^2}{-\sqrt{16}} \right\} = \left\{ \frac{27}{-4} \right\}$$

پاسخ

مثال: اگر $A = \{x+y, 2, 1\}$ و $B = \{2x, 3\}$ دو مجموعه‌ی برابر باشند. مقادیر x و y را به دست آورید.

(استان گیلان - فردار ۱۳۰۰)

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x + y = 3 \rightarrow \frac{1}{2} + y = 3 \rightarrow y = 2\frac{1}{2}$$

پاسخ

مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که دو مجموعه‌ی $\{y+3, 5\}$ و $\{x-1, 7\}$ برابر باشند.

$$\begin{array}{l} x-1=5 \\ x=6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y+3=7 \\ y=4 \end{array}$$

پاسخ

در ادامه روشی برای نمایش مجموعه‌ها به زبان (نماد) ریاضی معرفی می‌کنیم. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

این مجموعه، دو زیرمجموعه‌ی مهم دارد:

$$O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

اعداد طبیعی فرد

اعداد طبیعی زوج

نمایش نمادین



چون هر عدد زوج به صورت مضرب ۲ است. می‌توان عضوهای E را به صورت زیر نوشت:

$$2, 4, 6, \dots \Rightarrow 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots$$

می‌بینید که الگوی عضوهای E به صورت $2 \times k$ بوده که در آن $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ عددی طبیعی است.

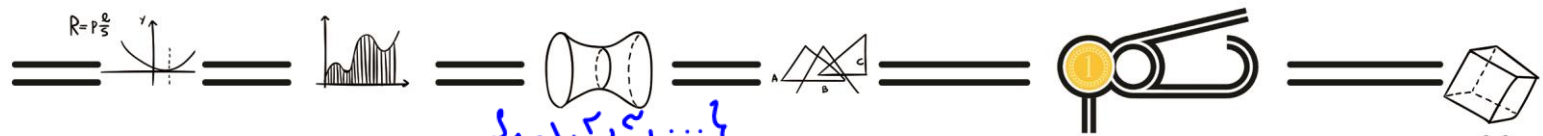
به عبارت دیگر مجموعه‌ی E را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

به طور کاملاً مشابه، اعداد طبیعی فرد $1, 3, 5, \dots$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$1, 3, 5, \dots \Rightarrow O = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$





مثال: مجموعه‌ی اعداد حسابی را با نماد ریاضی بنویسید.

$$W = \{k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

پاسخ

پای تخته

مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

الف) $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{W}\}$$

$$\{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

ب) $\{0, 3, 8, 15, 24, \dots\}$

مثال: (از کتاب) مجموعه‌ی $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید.

$$A = \{3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$$

پاسخ

مثال: هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4\}$

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

پاسخ

ب) $B = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$

$$\{-1, 0, 3, 8, 15, \dots\}$$

پاسخ

ج) $C = \left\{ \frac{x^2}{y^2} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5 \right\}$

$$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36} \right\}$$

پاسخ

اعداد گویا

شامل تمام کسرهایی هستند که صورت و مخرج آنها دو عدد صحیح بوده و مخرج غیر صفر است. این مجموعه را با $\mathbb{Q}$ نشان داده و لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\frac{a \text{ صورت}}{b \text{ مخرج}}$$

گویا
صورت و مخرج از عدد صحیح بیار
مخرج صفر نباشد