

ردیف	نمره
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبه توان‌های مختلف A ، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^n = O$.
۲	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ به صورت زیر معرفی شده باشد ماتریس A را بیابید. $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & , i = j \\ i - j & , i > j \\ j - i & , i < j \end{cases}$
۳	دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بنزید که $A \neq \overline{O}$ و $B \neq \overline{O}$ ولی $AB = \overline{O}$.
۴	وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.
۵	دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.
۶	اگر $A = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ وارون ماتریس A را بیابید.
۷	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.
	(الف) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^2 برابر ۵ می‌باشد.
	(ب) اگر $A^2 = A$ باشد در این صورت داریم: $(A + I)^2 = I + 3A$
۸	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{100} را به دست آورید؟
۹	اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ باشد، مطلوبست A^{100} .
۱۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
	(الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان این ماتریس برابر است.
۱۱	اگر $2A = \begin{bmatrix} A & -4 \\ 1 & A \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $ A^{-1} $ را بیابید.

ردیف	نمره	
۱۲		درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید.
		(الف) اگر A یک ماتریس 3×3 و $ A = 5$ باشد، آنگاه $ 2A = 40$ است.
۱۳		با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید: $(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$
۱۴		جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
		(الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون نامیده می‌شود.
۱۵		جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
		(الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس گویند.
۱۶		اگر $A = \begin{bmatrix} A & 0 & 1 \\ 1 & A & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $ A $ را بیابید.
۱۷	۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند، ماتریس نام دارد. (ب) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی (ج) حاصل ضرب هر ماتریس در وارونش برابر ماتریس است. (د) شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد، آن است که
۱۸	۱	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید: (الف) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با (ب) اگر A ماتریس 3×3 ، $ A = 5$ باشد، مقدار $ 3A $ برابر است.
۱۹	۰.۲۵	اگر در ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر باشد، ماتریس A را مربعی می‌نامیم. (درست - نادرست)
۲۰	۱	نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2A & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست.
۲۱	۱.۵	$A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 \\ 2 & m \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات یک دستگاه خطی هستند. دستگاه معادلات را تشکیل دهید و مقدار m را طوری تعیین کنید که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد.
۲۲	۱.۵	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & i < j \\ -1 & i = j \\ 2j-i & i > j \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - I^2$ را به دست آورید.

ردیف	نمره	
۲۳	۰.۵	ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 2 & ; [\frac{i+j}{2}] \leq 1 \\ j-2 & ; [\frac{i+j}{2}] > 1 \end{cases}$ تعریف شده است. درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A را محاسبه کنید. (۱) در ضابطه تابع نماد جزء صحیح است).
۲۴	۰.۵	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.
		(الف) برای هر دو ماتریس دلخواه A و B ، تساوی $AB = BA$ برقرار است.
		(ب) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $a_{ij} = 2i - j^2$ ، در این صورت درایه a_{23} برابر ۵- است.
۲۵	۰.۵	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.
		(الف) $A = \begin{bmatrix} a & a-4 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری است، در این صورت مقدار a برابر می‌باشد.
		(ب) اگر A یک ماتریس 3×3 و $ A = 1$ ، در این صورت $ 2A $ برابر است.

ردیف	نمره	
۱		$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = 0 \Rightarrow n = 3$ در اینجاست که ماتریس A را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.
۲		$A = [a_{ij}]_{r \times r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
۳		$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
۴		وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت $A^{-1} = \frac{1}{ A } \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است و داریم $A = 2$ پس A وارون پذیر است. بنابراین: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
۵		$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ $A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} + \frac{50}{26} \\ -\frac{2}{13} + \frac{30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{26} \\ \frac{26}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
۶		$A = [i^r - j]_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 1^2 - 2 \\ 2^2 - 1 & 2^2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
۷		
الف	نادرست	$A^2 \text{ سطر دوم} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = -4$
ب	درست	$(A + I)^2 = A^2 + 2A + I \stackrel{A^2=A}{=} I + 3A$

ردیف	نمره
۸	$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $A^r = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$ $A^{100} = (A^r)^{50} = (-4I)^{50} = -(4^{50}) \times I^{50} = -(4^{50})I$
۹	$A = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{100} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{100} \times B^{100}$ $B^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow B^r = I$ $B^r = B^r \times B^r = I \times I = I \Rightarrow B^r = B^r \times B^r = I \times I = I \Rightarrow B^{100} = I$ $A^{100} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{100} \times B^{100} = \frac{1}{3^{50}} \times I$
۱۰	
الف) ۸	
۱۱	$ 2A = (A ^r + 4) \Rightarrow 4 A = A ^r + 4 \rightarrow (A - 2)^r = 0 \rightarrow A = 2$ $ A^{-1} = \frac{1}{ A } = \frac{1}{2}$
۱۲	
الف) درست	$n \times n \text{ ماتریس } A \rightarrow KA = K^n A $ $ 2A = (2)^r A = 8 \times 5 = 40$
۱۳	$(A - 3I)^r = (A - 3I)(A - 3I) = A^r - 3AI - 3IA + 9I \overset{AI=IA=A}{\underset{I^r=I}{=}} A^r - 6A + 9I$
۱۴	
الف) ماتریس	
۱۵	
الف) قطری	
۱۶	$ A = A (A - 2) + 1(2) \Rightarrow A ^r - 3 A + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = 2 \end{cases}$
۱۷	الف) اسکالر ب) ندارد

ردیف	نمره	
	۱	(ج) همانی (I یا) (د) $A \neq 0$ (یا دترمینان A مخالف صفر باشد) (صفحه ۲۲، ۲۳، ۱۲، ۱۹ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) اسکالر (۲۵، نمره) (ب) ندارد (۲۵، نمره) (ج) همانی (I یا) (۲۵، نمره) (د) $A \neq 0$ (یا دترمینان A مخالف صفر باشد) (۲۵، نمره)
۱۸	۱	(الف) دترمینان ماتریس قطری $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ برابر است با abc. (ب) (صفحه ۳۰، ۳۱ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی (۵، نمره) (ب) ۱۳۵ (۵، نمره) $3A = 3^3 A = 27 \times 5 = 135$
۱۹	۰.۲۵	درست
۲۰	۱	$A = 2A \times 1 - (0 \times 1) \rightarrow A = 2A \rightarrow A = 4 A \rightarrow A = 0$ در نتیجه ماتریس A وارون پذیر نیست.
۲۱	۱.۵	روش اول: $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} = \frac{2}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 4 \Rightarrow m = 2 \\ 4m - 4 = 4 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$ روش دوم: $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} = \frac{2}{4} \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \Rightarrow \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{4} \\ m = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \end{cases} \Rightarrow m = 2 \text{ قابل قبول است}$
۲۲	۱.۵	روش اول: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^T - I^T = A^T - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ روش دوم:

ردیف	نمره	
	۱.۵	$A^T - I^T = (A - I)(A + I)$ $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $A + I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $(A - I)(A + I) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (صفحه ۲۱ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: روش اول: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (نمره ۵) $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (نمره ۵) $A^T - I^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (نمره ۵) روش دوم: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (نمره ۵) $A^T - I^T = (A - I)(A + I)$ $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (نمره ۲.۵) $A + I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (نمره ۲.۵) $(A - I)(A + I) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (نمره ۵)
۲۳	۰.۵	$A = \begin{bmatrix} 2 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$
۲۴	۰.۵	
		الف) نادرست
		ب) درست
۲۵	۰.۵	
		الف) ۴
		ب) -۸

ردیف	نمره
۱	دترمینان ماتریس زیر را برحسب سطر اول و برحسب ستون سوم محاسبه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$
۲	ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A \times B$ را به دست آورید و برقراری تساوی $ AB = A B $ را بررسی کنید.
۳	اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $ A ^2 - 5 A + 6 = 0$ برقرار باشد.
۴	اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11} = 4$ در این صورت $ A $ را بیابید.
۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.
۶	در دستگاه $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است. $x+y$ را به دست آورید.
۷	اگر برای دو ماتریس مربعی A و B داشته باشیم $AB = I$ ، آنگاه ثابت کنید. الف) A وارون پذیر است. ب) $B = A^{-1}$
۸	اگر A و B مربعی و وارون پذیر باشند، ثابت کنید: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
۹	اگر ماتریس A وارون پذیر باشد، ثابت کنید. $(A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^nA$
۱۰	اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون پذیر از مرتبه n باشند، ثابت کنید: $ A^{-1} + B^{-1} = \frac{ A+B }{ AB }$
۱۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.
۱۲	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس BA را به دست آورید.
۱۳	دترمینان ماتریس $M = [i^2 - j^2]_{3 \times 3}$ را به دست آورید؟

ردیف	نمره	
۱۴		جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
		الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان این ماتریس برابر است.
۱۵		دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A \cdot B$ را محاسبه کنید.
۱۶		اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید: $(A - B)^۲ = A^۲ - ۲AB + B^۲$
۱۷		اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $AX = B$ در نظر بگیریم، از تساوی ماتریس X را به دست آورید.
۱۸		مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x + my = ۱ \\ (m-۱)x + y = ۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.
۱۹		جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
		الف) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۲k-۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، مقدار k برابر است.
۲۰	۱.۵	ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.
۲۱	۰.۷۵	مقدار k را چنان بیابید که ماتریس $\begin{bmatrix} ۲k & ۸ \\ ۱ & k \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.
۲۲	۱.۵	از تساوی ماتریسی $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس A را به دست آورید.
۲۳	۲	اگر ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{۳ \times ۳}$ ، $B = [b_{ij}]_{۳ \times ۳}$ به صورت زیر تعریف شده باشند: $a_{ij} = \begin{cases} j^۲ - i & i > j \\ ۲j - ۱ & i = j \\ i^۲ - ۱ & i < j \end{cases}$ $b_{ij} = [i^۲j - ij^۲]$ الف) ماتریس‌های A ، B را با درایه‌هایشان مشخص کنید. ب) ماتریس $B^۲$ را به دست آورید. ج) دترمینان ماتریس A را به دست آورید.
۲۴	۱	دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را برحسب ستون اول به دست آورید.

ردیف	نمره
۲۵	دترمینان ماتریس مقابل را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید. $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

ردیف	نمره
۱	بسط برحسب سطر اول: $ A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ $= -12 + 6 + 20 = 14$ بسط برحسب ستون سوم: $ A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$ نتیجه: اولاً دترمینان برحسب هر سطر یا ستونی بسط داده شود، فرقی نمی‌کند و حاصل یکسان است. ثانیاً بهتر است دترمینان را برحسب سطر یا ستونی بسط دهیم که صفر بیشتری دارد.
۲	$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 25 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow AB = 22 \quad (1)$ $\begin{aligned} A &= 8 - 3 = 5 \\ B &= 6 - 4 = 2 \end{aligned} \rightarrow AB = 5 \times 2 = 10 \quad (2)$ (1), (2) $\rightarrow AB = A B$
۳	$ A ^2 - 5 A + 6 = 0 \rightarrow (A - 2)(A - 3) = 0$ $\rightarrow A = 2 \xrightarrow{a=1, b=2 \atop c=1, d=4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$ یا $ A = 3 \xrightarrow{a=2, b=1 \atop c=3, d=3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$
۴	می‌دانیم ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که درایه‌ها یکسان هستند. چون $a_{11} = 4$ بنابراین داریم: $ A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 64$
۵	$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $x + y + z = 2 + 1 + (-2) = 1$
۶	$\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow x + y = 1 + 3 = 4$
۷	الف)

ردیف	نمره
	$AB = I \rightarrow AB = I \rightarrow A B = 1 \rightarrow A \neq 0 \Rightarrow$ پس A وارون پذیر است. (ب) $AB = I \xrightarrow{\text{ضرب در } A^{-1}} A^{-1}(AB) = A^{-1}I$ $\rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1} \rightarrow IB = A^{-1} \rightarrow B = A^{-1}$
۸	طبق تعریف وارون باید ضرب AB و $B^{-1}A^{-1}$ برابر I باشد. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_I)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_I)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$
۹	$(A^{-1}BA)^T = (A^{-1}BA)(A^{-1}BA) = A^{-1}B(\underbrace{AA^{-1}}_I)BA = A^{-1}B^T A$ $(A^{-1}BA)^T = (A^{-1}B^T A)(A^{-1}BA) = A^{-1}B^T(\underbrace{AA^{-1}}_I)BA = A^{-1}B^T A$ به همین ترتیب داریم: $(A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^n A$
۱۰	$\frac{ A+B }{ AB } = \frac{ A+B }{ A B } = \frac{1}{ A } \frac{ A+B }{ B }$ $= A^{-1} A+B B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$
۱۱	$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x + y = 5 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + y + z = \frac{5}{2} \\ z = -2 \end{cases}$
۱۲	دترمینان ماتریس BA را با بسط نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم: $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}$ $3(-10) - 1(-10) - 1(-20) = 0 \Rightarrow BA =$
۱۳	$M = \begin{bmatrix} 1^2 - 1^2 & 1^2 - 2^2 & 1^2 - 3^2 \\ 2^2 - 1^2 & 2^2 - 2^2 & 2^2 - 3^2 \\ 3^2 - 1^2 & 3^2 - 2^2 & 3^2 - 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ $M = 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + (-8) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow M = 3 \times 25 - 8 \times 15 = 0$
۱۴	
الف	۸
۱۵	

ردیف	نمره	
		$\begin{cases} m-2=0 \\ n+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}$ $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$
۱۶		دو ماتریس A و B را تعویض پذیر گوئیم هرگاه $AB = BA$. $(A-B)^T = (A-B)(A-B) = A^T - AB - BA + B^T \stackrel{AB=BA}{=} A^T - 2AB + B^T$
۱۷		$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$
۱۸		$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \neq \frac{1}{3} \rightarrow m(m-1) = 2 \rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$
۱۹		
		الف $k = \frac{1}{2}$
۲۰	۱.۵	فرض می‌کنیم ماتریس‌های B, C هر دو وارون ماتریس A باشند و ثابت می‌کنیم $B = C$. طبق فرض $AB = BA = I, AC = CA = I$ اثبات: $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$ (صفحه ۲۳ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: فرض می‌کنیم ماتریس‌های B, C هر دو وارون ماتریس A باشند و ثابت می‌کنیم $B = C$. (۲۵، نمره) طبق فرض: $\underbrace{AB = BA = I}_{(25, \text{نمره})}, \underbrace{AC = CA = I}_{(25, \text{نمره})}$ اثبات: $\underbrace{B = IB}_{(25, \text{نمره})} = \underbrace{(CA)B = C(AB)}_{(25, \text{نمره})} = \underbrace{CI = C}_{(25, \text{نمره})}$
۲۱	۰.۷۵	$\begin{vmatrix} 2k & 8 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2k^2 - 8 = 0 \rightarrow k^2 = 4 \rightarrow k = \pm 2$ (صفحه ۲۳ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $\underbrace{\begin{vmatrix} 2k & 8 \\ 1 & k \end{vmatrix}}_{(25, \text{نمره})} = 0 \rightarrow \underbrace{2k^2 - 8}_{(25, \text{نمره})} = 0 \rightarrow k^2 = 4 \rightarrow k = \pm 2 \quad (25, \text{نمره})$
۲۲	۱.۵	$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15-14} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -9 & 17 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ (صفحه ۲۲، ۲۵ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:

ردیف	نمره
	۱.۵ $A = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}}^{(5, \text{نمره})} \times \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}^{(5, \text{نمره})} = \frac{1}{15-14} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -9 & 17 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad (5, \text{نمره})$ به راه حلی که ماتریس A را $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فرض می‌کند و با حل دستگاه a, b, c, d را به دست می‌آورد نمره کامل تعلق گیرد.
۲۳	(الف) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (ج) $B^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & -36 & 12 \\ -36 & -40 & -12 \\ 12 & -12 & -72 \end{bmatrix}$ (صفحه ۱۱، ۱۸ و ۲۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) $ A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(15-3) = 12$ (ب) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (5, \text{نمره})$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (5, \text{نمره})$ (ج) $B^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & -36 & 12 \\ -36 & -40 & -12 \\ 12 & -12 & -72 \end{bmatrix} \quad (5, \text{نمره})$ $ A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(15-3) = 12 \quad (5, \text{نمره})$
۲۴	روش اول: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $ A = (-1)^2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^2 \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4 \times (-3) \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-32) + 0 + 12 = (-20)$ روش دوم: $ A = (-1)^2 \times 2 \times (0 - 16) + (-1)^2 \times 0 \times (-1 + 8) + (-1)^4 \times (-3) \times (-4 - 0)$ $= (-32) + 0 + 12 = (-20)$
۲۵	۱ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = (4 - 9 - 8) - (-8 - 12 + 3) = -13 + 17 = 4$

ردیف	نمره	
۱		اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$
۲		اگر $A = \begin{bmatrix} 5 A & A \\ 5 & 4 A ^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A ^3 - 2)$ را بیابید.
۳		اگر $A^2 = A$ و m یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید: $(I - mA)^{-1} = I + \frac{m}{1-m}A$
۴		جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
		(الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A باشد.
۵		ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^2 - B = \overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است).
۶		برای دو ماتریس 2×2 و وارون پذیر A و B داریم: $(A \times B)^{-1} = \dots\dots\dots$ $(kA)^{-1} = \dots\dots\dots$ $(A^{-1})^{-1} = \dots\dots\dots$
۷		اگر $A = \begin{bmatrix} 5 A & 2 A \\ 5 & 4 A ^2 \end{bmatrix}$ و $ A > 0$ باشد در این صورت (A^{-1}) را محاسبه کنید.
۸		اگر ماتریس $A_{3 \times 3}$ به صورت $A = [i - j]$ باشد، مطلوبست محاسبه دترمینان ماتریس $2A + I$.
۹		اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه $A^2 = mA + nI_2$ برقرار باشد. (I_2 ماتریس همانی است).
۱۰		جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$
۱۱		(الف) اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با است. (ب) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A + I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).

ردیف	نمره	
۱۲		الف) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست - نادرست) ب) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $ A A $ را بیابید.
۱۳		اگر $bij = \begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i < j \\ 1 & i > j \end{cases}$ ، ماتریس $B = [bij]_{3 \times 3}$ را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.
۱۴		با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید: $(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$
۱۵		مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ (m-1)x + y = 3 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.
۱۶		روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هریک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.
		الف) $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$
		ب) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$
		پ) $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$
۱۷	۱.۵	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -1 & i-j > 1 \\ 0 & i-j = 1 \\ 1 & i-j < 1 \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - 2I$ را به دست آورید.
۱۸	۱	با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^5 را محاسبه کنید.
۱۹	۱	معادله ماتریس $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ را حل کنید.
۲۰	۱.۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ با محاسبه، نوع ماتریس A^6 را با ذکر نام تعیین کنید.

ردیف	نمره	
۲۱	۱.۵	برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ داریم $A^y = mA$ مقدار m را به دست آورید.
۲۲	۱.۷۵	به ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - my = 3 \\ mx - 8y = m + 2 \end{cases}$ جواب ندارد؟
۲۳	۱.۵	اگر $3A = \begin{bmatrix} A & -5 \\ 1 & 4 A \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر قابل قبول $ A^{-1} $ را به دست آورید.
۲۴	۱	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $ A^{-1} = 3$ باشد، حاصل $\frac{ A^3 }{ 3A }$ را به دست آورید.
۲۵	۱.۵	ماتریس $2A = \begin{bmatrix} A & -1 \\ 3 & A \end{bmatrix}$ وارون پذیر و $ A > 1$ است. حاصل $3A^{-1}$ را به دست آورید.

ردیف	نمره
۱	$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ به همین ترتیب $A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$
۲	$A = \begin{bmatrix} 5 A & A \\ 5 & 4 A ^2 \end{bmatrix}$ $ A = 20 A ^2 - 5 A \Rightarrow 20 A ^2 - 6 A = 0 \Rightarrow 2 A (10 A ^2 - 3) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \Rightarrow A ^2 - 2 = -2 \\ A = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{+} A ^2 - 2 = \frac{2}{10} \sqrt{\frac{2}{10}} - 2 \\ \xrightarrow{-} A ^2 - 2 = -\frac{2}{10} \sqrt{\frac{2}{10}} - 2 \end{cases} \end{cases}$
۳	باید ضرب دو ماتریس $(I + \frac{m}{1-m}A)$ و $(I - mA)$ برابر I شود. $(I - mA)(I + \frac{m}{1-m}A) = I + \frac{m}{1-m}A - mA - \frac{m^2 A^2}{1-m}$ $= I + \frac{m - m(1-m) - m^2}{1-m}A = I + \frac{0}{1-m}A = I$ به همین ترتیب ثابت می شود $(I + \frac{m}{1-m}A)(I - mA)$ هم برابر I می شود.
۴	
	الف مخالف صفر
۵	طبق فرض $A^2 - B = \overline{0}$ داریم: $A^2 = B \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ $\begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases} \rightarrow a=0, b=5$
۶	$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k} \times A^{-1}, (A^{-1})^{-1} = A$
۷	$ A > 0$ $ A = 5 A \times 4 A ^2 - 5 \times 2 A = 20 A ^3 - 10 A \Rightarrow 20 A ^3 - 11 A = 0 \Rightarrow A (20 A ^2 - 11) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \text{ یا غلط} \\ 20 A ^2 = 11 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{11}{20}} A = -\sqrt{\frac{11}{20}} A \end{cases}$

ردیف	نمره
	$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5\sqrt{\frac{11}{20}} & 2\sqrt{\frac{11}{20}} \\ 5 & \frac{11}{5} \end{bmatrix} A = \sqrt{\frac{11}{20}}$ $= \sqrt{\frac{20}{11}} \times \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -2\sqrt{\frac{11}{20}} \\ -5 & 5\sqrt{\frac{11}{20}} \end{bmatrix} A^{-1} = \frac{1}{ A } \times \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -2\sqrt{\frac{11}{20}} \\ -5 & 5\sqrt{\frac{11}{20}} \end{bmatrix}$
۸	$A = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $2A + I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $2A + I$ را با بسط نسبت به سطر اول می‌بایم: $\text{displaystyle } 2A+I = \left \begin{matrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix} \right = \begin{matrix} 1(1+4) - (-2)(2+8) + \\ (-4)(4-4) \end{matrix} = 5+20=25$
۹	$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ $mA + nI = \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \Rightarrow n = 8, m = 1$
۱۰	$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3+1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$
۱۱	الف) $2x - 1 = 5 \rightarrow x = 3$ ب) ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. $\begin{cases} m+1=0 \\ 2n+4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-2 \end{cases}$ $A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
۱۲	الف) نادرست، زیرا در دستگاه دو معادله دو مجهولی، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، دو خط موازی اند و هیچ نقطه مشترکی ندارند، پس دستگاه هیچ جوابی ندارد. ب) با استفاده از دستور ساروس دترمینان ماتریس A را به دست می‌آوریم: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow A = (0 \times 2 \times 0 + 0 \times 0 \times (-1) + 1 \times 0 \times 0) - (1 \times 2 \times (-1) + 0 + 0) = 0 - (-2) = 2$ می‌دانیم اگر k یک عدد حقیقی باشد و A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت $kA = k^n A$ بنابراین داریم: $ A A = A ^3 A = A ^4 = 16$
۱۳	$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

ردیف	نمره
۱۴	$(A - 3I)^2 = (A - 3I)(A - 3I) = A^2 - 3AI - 3IA + 9I^2 \stackrel{AI=IA=A}{=} A^2 - 6A + 9I$
۱۵	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \neq \frac{1}{3} \rightarrow m(m-1) = 2 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$
۱۶	
الف	در هریک از این دستگاه‌ها، فرض کنیم A ماتریس ضرایب دستگاه باشد: $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 3 - (-10) = 13$ چون $A \neq 0$ پس دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. فرض کنیم $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ جواب این دستگاه باشد، بنابراین $X = A^{-1}B$ توجه داریم که $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \frac{1}{ A } \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ پس: $X = A^{-1}B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 39 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$
ب	$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow A = -6 - (-6) = 0$ چون $A = 0$ بنابراین دستگاه یا فاقد جواب است یا بی‌شمار جواب دارد. از طرفی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ زیرا $\frac{a}{a'} = \frac{1}{-2}$ و $\frac{b}{b'} = \frac{3}{-6}$ و $\frac{c}{c'} = \frac{5}{1}$ پس دستگاه معادلات فوق فاقد جواب است.
پ	$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 12 - 12 = 0$ در اینجا هم دترمینان ماتریس ضرایب صفر است و داریم $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ زیرا $\frac{a}{a'} = \frac{-2}{4} = \frac{b}{b'} = \frac{3}{-6} = \frac{c}{c'} = \frac{-1}{2}$ پس دستگاه معادلات فوق بی‌شمار جواب دارد.
۱۷	۱.۵ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A^2 - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
۱۸	روش اول: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I \Rightarrow A^4 = A^2 \times A^2 = (2I) \times (2I) = 4I^2 = 4I$ $\Rightarrow A^5 = A \times A^4 = A \times (4I) = 4A \text{ یا } A^5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ روش دوم: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I \Rightarrow A^3 = A \times A^2 = A \times (2I) = 2A$

ردیف	نمره	
	۱	روش سوم: $\Rightarrow A^{\Delta} = A^r \times A^r = (2I) \times (2A) = 4A \Rightarrow A^{\Delta} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ $A^r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = A \times A^r = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^r = A \times A^r = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{\Delta} = A \times A^r = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$
۱۹	۱	(صفحه ۱۷ تا ۲۰ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow [-x + 2 \quad 3] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ $\rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (نمره ۲۵) $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \overbrace{[-x + 2 \quad 3]}^{(نمره ۲۵)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ $\rightarrow \underbrace{-x^2 + 2x + 3 = 0}_{(نمره ۲۵)} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \quad (نمره ۵)$
۲۰	۱.۵	(صفحه ۱۷ تا ۱۹ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $A^r = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ $A^r = A^r \times A^r = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (\text{ماتریس همانی})$ (نمره ۵) $A^r = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad (نمره ۵)$ $A^r = A^r \times A^r = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (\text{ماتریس همانی})$ (نمره ۵)
۲۱	۱.۵	(صفحه ۲۰ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $A^r = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I$ $A^v = A^r \times A^r \times A^r \times A = (-2I)(-2I)(-2I)(A) = -8I^3 A$ $= -8IA = -8A \Rightarrow m = -8$ (نمره ۲۵) $A^r = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I \quad (نمره ۲۵)$ $A^v = A^r \times A^r \times A^r \times A = (-2I)(-2I)(-2I)(A) = -8I^3 A \quad (نمره ۲۵)$ $= -8IA = -8A \Rightarrow m = -8 \quad (نمره ۲۵)$ (نمره ۲۵) به روش های دیگر محاسبه A^v نیز نمره تعلق گیرد مانند: $A^v = A^r \times A^r \times A = A^{\Delta} \times A^r = \dots$

ردیف	نمره	
۲۲	۱.۷۵	$\begin{cases} 2x - my = 3 \\ mx - 8y = m + 2 \end{cases}$ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \underbrace{\frac{2}{m} = \frac{-m}{-8}}_{-m^2 = -16 \Rightarrow m = \pm 4} \neq \frac{3}{m+2}$ $11m = -4 : \frac{2}{-4} = \frac{-4}{8} \neq \frac{3}{-2} \checkmark \Rightarrow m = -4$ $m = 4 : \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \neq \frac{3}{6} \times$ (صفحه ۲۶ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:
۲۳	۱.۵	$\begin{cases} 2x - my = 3 \\ mx - 8y = m + 2 \end{cases}$ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \underbrace{\frac{2}{m} = \frac{-m}{-8} \neq \frac{3}{m+2}}_{\substack{-m^2 = -16 \\ m = \pm 4}} \quad \left. \begin{matrix} \text{(نمره ۵)} \\ \text{(نمره ۵)} \end{matrix} \right\}$ $m = -4 : \frac{2}{-4} = \frac{-4}{8} \neq \frac{3}{-2} \checkmark \quad \text{(نمره ۵)} \Rightarrow m = -4 \quad \text{(نمره ۲۵)}$ $m = 4 : \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \neq \frac{3}{6} \times$ (صفحه ۳۰ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:
۲۴	۱	$ A^{-1} = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ $\frac{ A^3 }{ 3A } = \frac{ A ^3}{3^3 A } = \frac{ A ^2}{3^3} = \frac{(\frac{1}{3})^2}{3^3} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$ $ A^{-1} = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad \text{(نمره ۲۵)}$ $\frac{ A^3 }{ 3A } = \frac{ A ^3}{3^3 A } \quad \text{(نمره ۵)} = \frac{ A ^2}{3^3} = \frac{(\frac{1}{3})^2}{3^3} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} \quad \text{(نمره ۲۵)}$ (صفحه ۲۹، ۳۰ و ۳۱ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:
۲۵	۱.۵	$\underbrace{ 2A }_{ A } = A ^2 + 3 - A = 1, A = 3^{ A >1} \Rightarrow A = 3$ $3A^{-1} = 3\left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$