

### اصول و روابط مشتق گیری

(۱) فرمول های اصلی:

۱)  $a \rightarrow 0$

۲)  $ax \rightarrow a$

۱)  $kx^n \rightarrow knx^{n-1}$   
 $۳x^۲ \rightarrow ۶x$

۲)  $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۳)  $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{-1}{x^2}$

۲)  $\sqrt[m]{x^n} \rightarrow \frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$   
 $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(۲) فرمول اعمال روی توابع:

۱)  $f \pm g \rightarrow f' \pm g'$

۲)  $f \times g \rightarrow f'g + g'f$

۳)  $f \div g \rightarrow \frac{f'g - g'f}{g^2} \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

۴)  $f \circ g(x) \rightarrow g'(x)f'(g(x))$

(۳) مشتق گیری از توابع تو در تو:

۱)  $\sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$   
 $\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-5}{x+1}}} \times \frac{1}{(x+1)^2}$

۲)  $(x^2+5x)^f \rightarrow f(x^2+5x) \times (2x+5)$

۱- مشتق توابع سوالات زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست).

•  $f(x) = (2x^5 - 1)^f$

$f'(x) = f(2x^5 - 1) \times (10x^4)$

•  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 6}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 6}} \times (3x^2 + 4x)$



$$\bullet f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}} \times \frac{11}{(x+1)^2}$$

$$\bullet f(x) = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x-6}$$

$$f'(x) = \frac{(-1/2x)(x-6) - (1)(-\sqrt{x^2+1})}{(x-6)^2}$$

$$\bullet f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+4)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+4) + (3x^2)(\sqrt{3x+2})$$

۲- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 2$  و  $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ ، آنگاه  $(g \circ f)'(1)$  کدام است؟

$$g'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5-x^2}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$g(f(x))' \sim f'(x) \times g'(f(x)) \xrightarrow{f(1)=2} f'(1) \times g'(2) = \frac{-1}{2} \times 2 = -1$$

۳- اگر  $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x$  باشد، مقدار  $f''(-2)$  را به دست آورید.

$$f'(x) = 12x^3 - 10x + 1$$

$$f''(x) = 36x^2 - 10 \xrightarrow{f'(-2)} 144 + 10 = 154$$



### مشتق پذیری

#### به کمک تعریف مشتق:

عدم برابری مشتق چپ و راست  
بینهایت شدن جواب مشتق که در اثر **گرم بیرونی** است

۴- مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x + 4 & x < 1 \end{cases}$  را در  $x = 1$  بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

مشتق بیرون است.

۵- مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی نمایید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2$$

۶- نشان دهید خط  $x = 2$  مماس قائم بر منحنی  $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$  می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0^2}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

بررسی  
دو مشتق  
نمایند  
(نشان دهید)



## آهنگ تغییرات

$$f'(x_1) \text{ لحظه ای}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ متوسط}$$

۷- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$  در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[-2, 0]$  است؟

$$f'(2) = 13 \text{ لحظه ای در } 2$$

$$f'(x) = 4x + 5$$

$$\text{سرعت متوسط بازه } [-2, 0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

۸- معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  بر حسب متر در بازه  $[0, 5]$  ( $t$  بر حسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط را در بازه  $[0, 5]$  و سرعت لحظه‌ای را در لحظه  $t = 2$  به دست آورید.

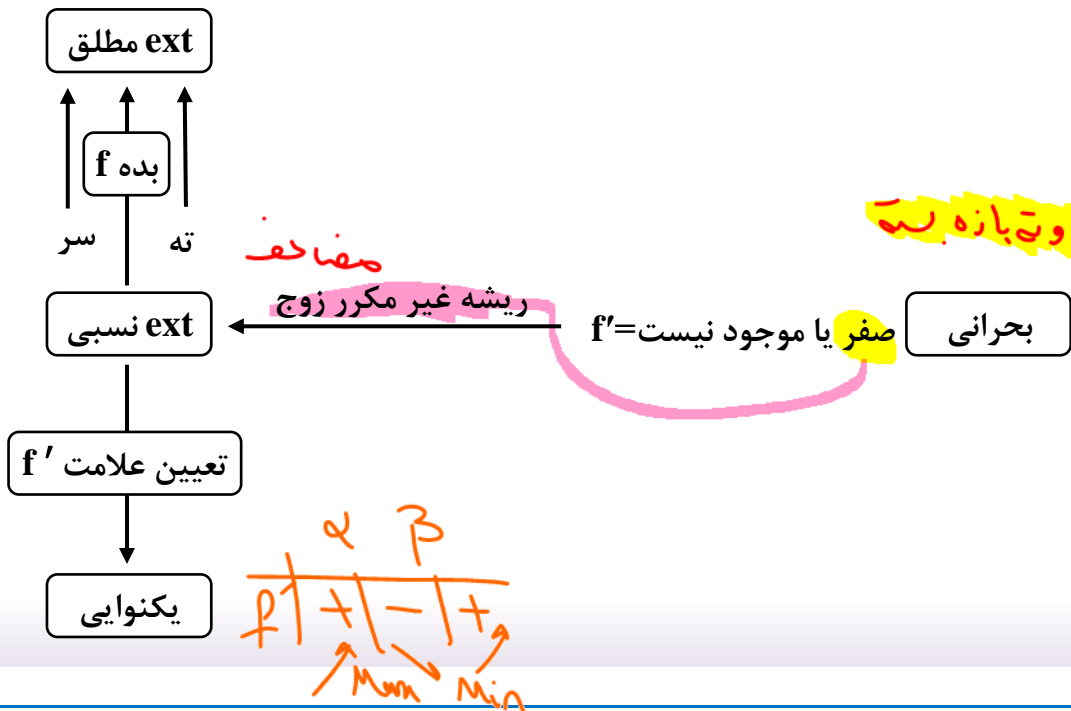
$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4 \quad ; \quad \begin{cases} f(t) = t^2 - t \\ f'(t) = 2t - 1 \end{cases}$$

\* در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 5]$  با هم برابرند؟

$$f'(t) = 4 \rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = 2.5$$



### کل کاربرد مشتق!



۹- در تابع  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ، مطلوب است:

• نقاط بحرانی:

$\{1, 3\}$   
 $\{1, 3\} \text{ ext}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

دربازه  $[2, 3]$ ؟  $[1, 4]$ ؟

• نقاط بحرانی در بازه  $[0, 4]$ :  $\{0, 1, 3, 4\}$

• وضعیت صعودی و نزولی و جنس اکسترمم نسبی:

$f'$	+	-	+
$f$	↘	↗	↘
		Max	Min

صعودی؟  $(-\infty, 1)$ ،  $(3, 4)$ ،  $(-\infty, 3)$ ؟  
نزولی؟  $(1, 3)$   
Max؟  $1$ ؟  
Min؟  $3$ ؟

• اکسترمم مطلق در بازه  $[-1, 5]$ :

$f(-1) = -10$  (Min)     $f(5) = 21$  (Max)     $f(1) = 5$      $f(3) = 1$

۱۰- در تابع  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ، مطلوب است:

• نقاط بحرانی:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

• وضعیت صعودی و نزولی و جنس اکسترمم نسبی:

$f'$	-	+	-	+
$f$	↘	↗	↘	↗
		Min	Max	Min

۱۱- در تابع  $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ ، مطلوب است:

نقاط بحرانی:

•  $x=0$  *ext. min*

•  $x=1$  *ext. max*

	0	1	
$f'$	-	-	+
$f$			

*Min*

• وضعیت صعودی و نزولی و جنس اکسترمم نسبی:

۱۲- بزرگترین بازه از  $\mathbb{R}$  که تابع  $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$  در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

	-1	1	
$f'$	-	+	-
$f$			

$f' > 0 \rightarrow (-1, 1)$

۱۳- اگر نقطه  $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = x^3 + bx^2 + d$  باشد، مقادیر  $b$  و  $d$  را به دست آورید.

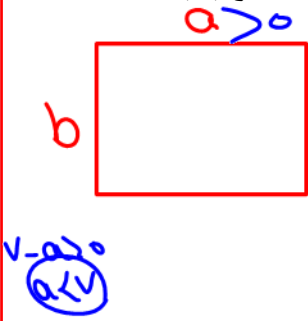
$$f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4b = 0 \rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 8 - 12 + d = 1 \rightarrow d = 5$$



۱۴- در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید.



$$a + b = 7 \rightarrow b = 7 - a \quad 0 < a < 7$$

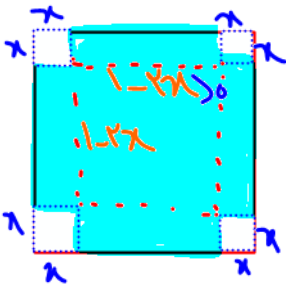
$$S = ab \rightarrow S(a) = a(7 - a) \Rightarrow S(a) = 7a - a^2$$

$$S'(a) = 7 - 2a = 0 \rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$b = 7 - \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$



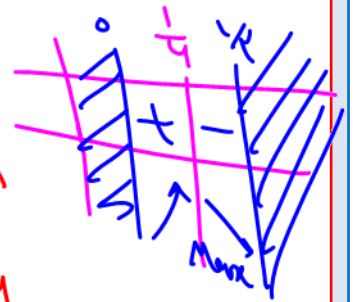
۱۵- ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع  $x$  برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس حجم جعبه را به اندازه  $x$  برمی‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار  $x$  چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.



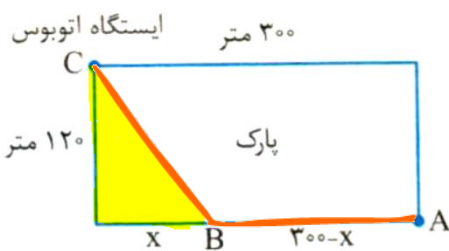
$$V(x) = x(1 - 2x)^2 \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$V'(x) = (1 - 2x)^2 - 4(1 - 2x)x = 0$$

$$\rightarrow (1 - 2x)(1 - 2x - 4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$



۱۶- در شکل مقابل، شخصی در نقطه  $A$  قرار دارد. او می‌خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد. این شخص می‌تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه  $A$  به سمت غرب برود و همچنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند. مقدار  $x$  کدام باشد تا این شخص در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟



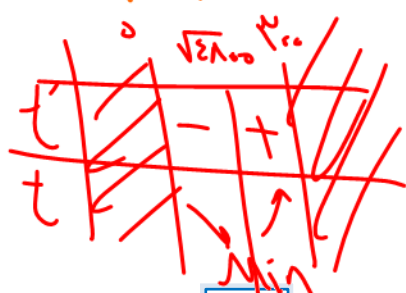
$$t = \frac{300 - x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 14400}}{4} \quad 0 < x < 300$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 14400}}\right) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 14400}} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 14400}$$

$$\rightarrow 4x^2 = x^2 + 14400 \rightarrow 3x^2 = 14400 \rightarrow x^2 = 4800 \rightarrow x = \sqrt{4800}$$

$$BC = \sqrt{x^2 + 14400}$$



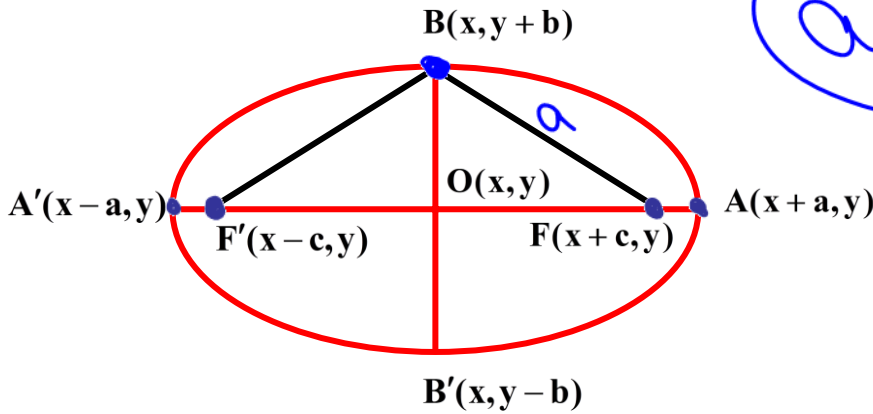
**بیضی**

**تعریف بیضی:** مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله آن ها از دو نقطه ثابت به نام کانون عددی ثابت

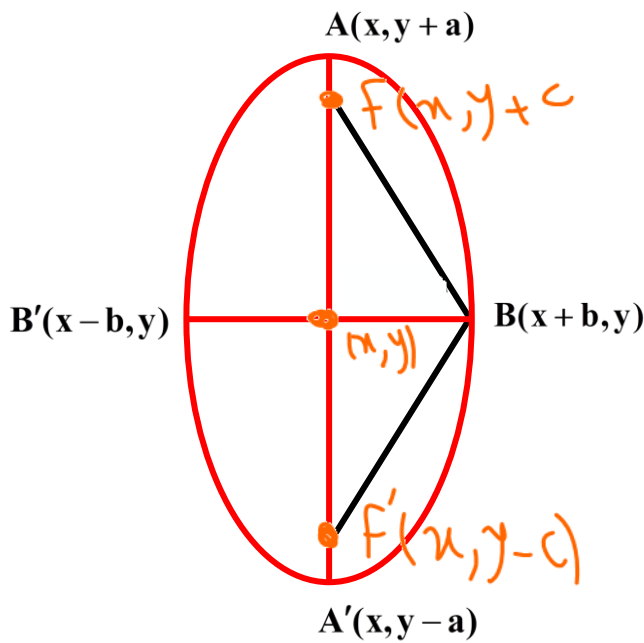
برابر  $2a$  است

**(۱) بیضی افقی:**

$$a^2 = b^2 + c^2$$



**(۲) بیضی قائم:**



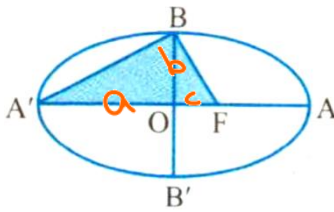
**خروج از مرکز:**

$$0 < e = \frac{c}{a} < 1$$

← کشیده      ← دایره



۲۰- اگر طول قطر بزرگ  $AA'$  و قطر کوچک  $BB'$  بیضی مقابل به ترتیب  $10, 8$  باشد:



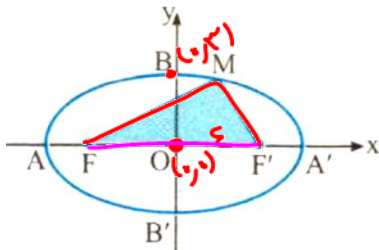
• مقدار  $A'F$  را به دست آورید. (F کانون بیضی است).

$$\begin{aligned} 2a &= 10 \rightarrow a = 5 & 2b &= 8 \rightarrow b = 4 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \rightarrow 25 = 16 + c^2 \rightarrow c = 3 \\ A'F &= a + c = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

• مساحت مثلث هاشور خورده ( $\triangle BFA'$ ) چقدر است؟

$$\frac{1}{2} A'F \times BO = \frac{1}{2} (a+c)b = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$$

۲۱- اگر در بیضی مقابل مختصات کانون  $F'(4,0)$  و مختصات رأس  $B(0,3)$  باشد:



• قطر بزرگ بیضی را بیابید.

$$\begin{aligned} c &= 4 & b &= 3 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a = 5 \\ 2a &= 10 \end{aligned}$$

• محیط مثلث  $MFF'$  را بیابید.

$$\underbrace{MF' + MF}_{2a} + \underbrace{FF'}_{2c} = 2a + 2c = 10 + 8 = 18$$

### دایره

فرم استاندارد دایره:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$   
 $O(-1, 2) \quad R=3$

$(\alpha, \beta)$

مرکز:

$R$

شعاع:

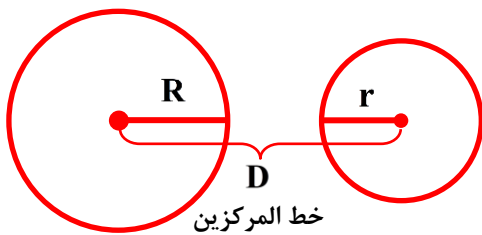
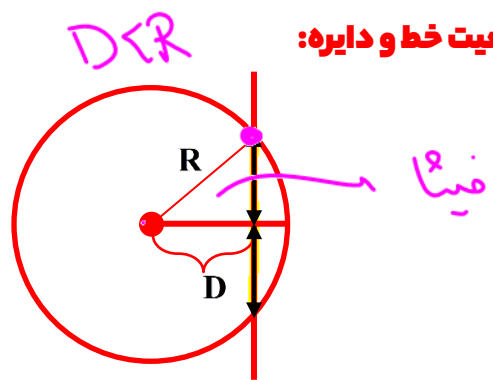
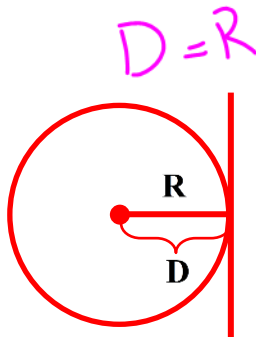
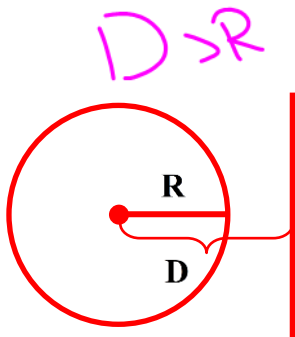
فرم باز دایره:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  مرکز:

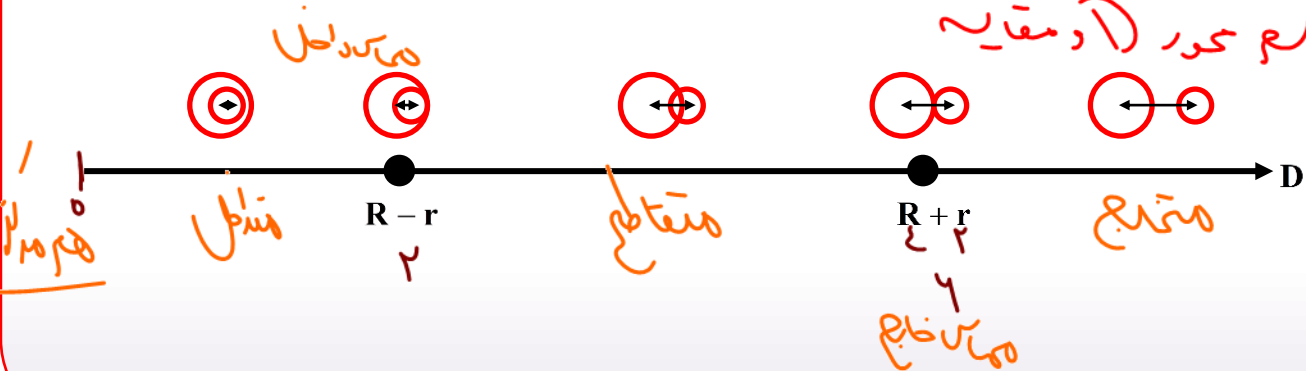
شعاع:  $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

وضعیت خط و دایره:



وضعیت نسبی دو دایره:

- ① مرکز و شعاع هر دایره حساب
- ② خط المراكزین حساب (فاصله دو مرکز)
- ③ رسم محور (آدمقاییه)



۲۲- معادله گسترده یک دایره به صورت  $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$  است. مختصات مرکز و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به صورت استاندارد بنویسید.

$O(-2, -1)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{14 + 4 - 4} = 2$

$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$

۲۳- حدود  $m$  را طوری مشخص کنید که معادله  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + m = 0$  معادله یک دایره باشد.

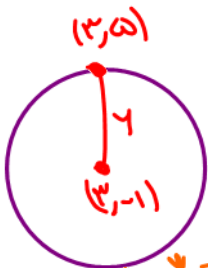
$\frac{1}{2} \sqrt{14 + 4 - 4m} = \frac{1}{2} \sqrt{20 - 4m} > 0$

$20 > 4m \Rightarrow m < 5$

① ضریب  $x^2$  در  $y^2$  برابر باشد  
② عبارت زیر رادیکال (تفاوت) مثبت باشد

۲۴- در سؤالات زیر، معادله دایره را بنویسید.

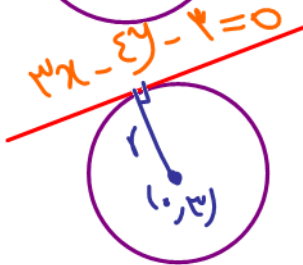
• دایره‌ای که مرکز آن  $(3, -1)$  و نقطه  $(3, 5)$ ، نقطه‌ای روی آن باشد.



$r = \sqrt{0^2 + 36} = 6$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 36$

• مرکز آن  $(0, 3)$  و بر خط  $3x - 4y = 3$  مماس باشد.



$r = \frac{|-12 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$

$x^2 + (y-3)^2 = 9$

۲۵- مشخص کنید در سؤالات زیر، دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

•  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

$O(1, -2)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3$

$O(-1, 2)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16} = \sqrt{5}$

$D = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$



مستطیل  
 $D = R_1 + R_2$

•  $x^2 + y^2 + 2y = 0$ ,  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

$O(0, -1)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$

$O(1, -2)$

$R = \sqrt{5}$

$D = \sqrt{(0-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{2}$



متقاطع  
 $R_1 < D < R_1 + R_2$



## قانون احتمال کل (مغودار درختی)

۲۶- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد بزرگسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟ این احتمال چند درصد است؟

$$\begin{aligned}
 & \text{کودک} \quad \frac{20}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{60}{10000} \\
 & \text{بزرگسال} \quad \frac{50}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{250}{10000} \\
 & \text{سالمند} \quad \frac{30}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{30}{10000} \\
 & \Rightarrow \text{احتمال کل} = \frac{60}{10000} + \frac{250}{10000} + \frac{30}{10000} = \frac{340}{10000} \\
 & = \frac{34}{1000} = 3.4\%
 \end{aligned}$$

۲۷- چهار ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد که شامل ۴ مهره قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند و ظرف سوم ۸ مهره دارد که شامل ۶ مهره قرمز است. در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟

$$\begin{aligned}
 & \text{ظرف اول} \quad \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} \\
 & \text{ظرف دوم} \quad \frac{1}{4} \times 1 \\
 & \text{ظرف سوم} \quad \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} \\
 & \text{ظرف چهارم} \quad \frac{1}{4} \times 0
 \end{aligned}$$

۲۸- دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم، شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. مهره‌ای را از ظرف اول انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس مهره‌ای را به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم، به چه احتمالی این مهره سبز است؟



$$\begin{aligned}
 & \text{ظرف اول} \quad \frac{4}{10} \times \frac{4}{13} = \frac{16}{130} \\
 & \text{ظرف دوم} \quad \frac{6}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{30}{130} \\
 & \Rightarrow \text{احتمال کل سبز} = \frac{16}{130} + \frac{30}{130} = \frac{46}{130}
 \end{aligned}$$