

شُعبہ امتحان

ریاضی دہم با استاد علی افروز



۱. در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$a_1 + 4d = 54$$

$$a_1 + 2d = 20$$

$$\rightarrow a_1 + 18 = 20 \rightarrow a_1 = 2$$

$$3d = 34 \rightarrow d = 9$$

$$2, 11, 20, 29, 38, 47, 54, \dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 2 + 9(n-1)$$
$$a_n = 9n - 7$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$
$$= 2 + 10 \times 9 = 92$$

پس!



۲. جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\therefore t_1 r^5 = 96$$

$$t_1 r^2 = 12$$

$$\frac{r^3}{r^2} = \frac{r^3}{r^2} = 8$$

$$\rightarrow \sum t_1 = 12 \rightarrow$$

$$t_1 = 3$$

$$\rightarrow r = 2$$

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$$

$$\text{جمله ششم؟ } t_1 r^5 = 3 \times 2^5 = 96$$

$$t_n = 3 \times 2^{n-1}$$



۳. اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ نگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{9}{14} = \frac{23}{14} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{14}{23}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{23}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1$$

مربع
↓
cos
sin
1



۴. درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{(1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\cot \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\cot^2 \alpha}\right) \cos^2 \alpha}{\cot \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} = \tan \alpha \checkmark$$



۵. با فرض بامعنی بودن کسرها، درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \\ &= \frac{\cancel{1 - \sin \alpha} \cos \alpha}{\cancel{\cos \alpha} (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \checkmark \end{aligned}$$



۶. معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$x^2 + 2x = 24$$

$$x^2 + 2x + 1 = 25 \rightarrow (x+1)^2 = 25$$

$$\begin{cases} x+1=5 \rightarrow \boxed{x=4} \\ x+1=-5 \rightarrow \boxed{x=-6} \end{cases}$$

۷. معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

$$-2x^2 + x + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - 4(-2)(3) = 25 \\ x_1 &= \frac{-1 + 5}{-4} = 1 \\ x_2 &= \frac{-1 - 5}{-4} = 3/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-1 + 5}{-4} = 1 \\ x_2 &= \frac{-1 - 5}{-4} = 3/2 \end{aligned}$$



۹. هر یک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$A = (3x + 1)(x - 2)$$

$$D = \frac{x(x^2 - 1)}{5 - 2x}$$

$$D = \frac{x(x^2 - 1)}{5 - 2x}$$

$$x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$5 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

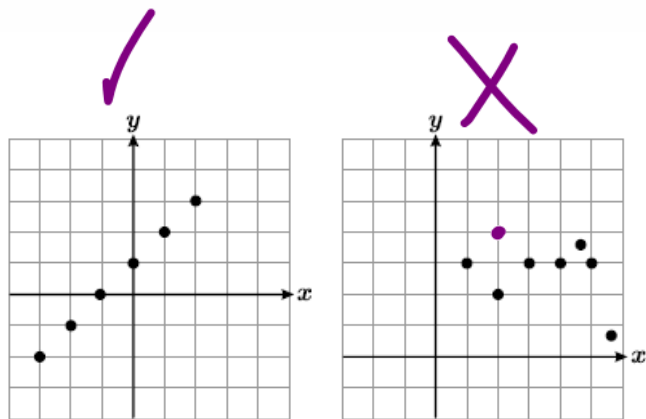
الف

	$-\frac{1}{3}$		2		
$3x+1$	-	0	+	+	
$x-2$	-	-	0	+	
A	+	0	-	0	+

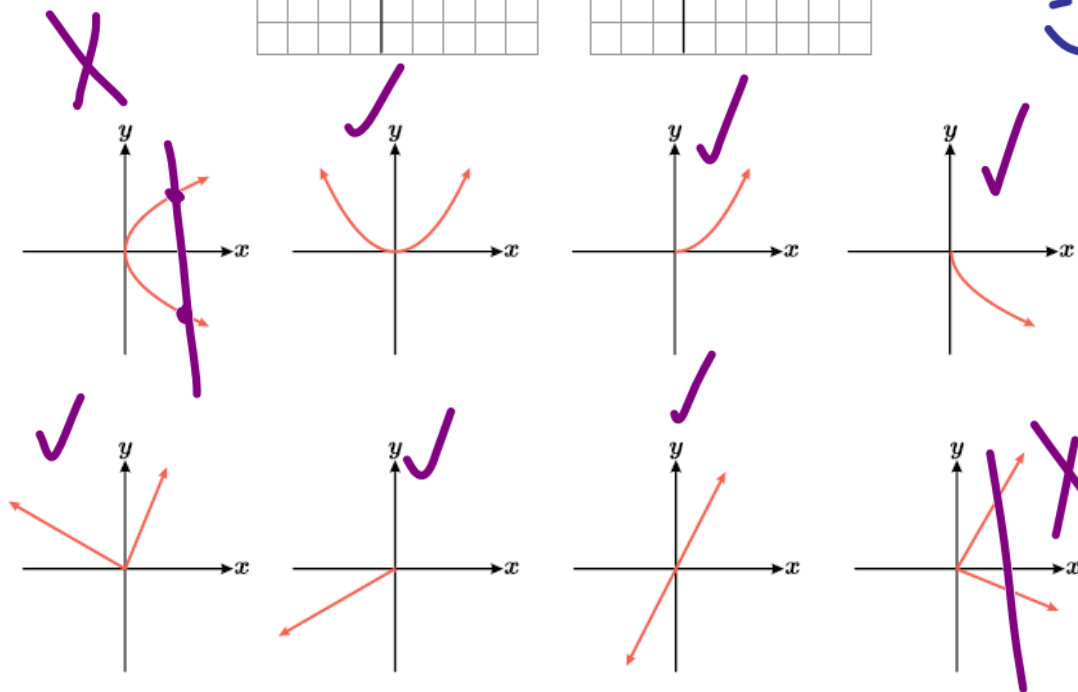
ب

	-1	0	1	$\frac{5}{2}$					
x	-	-	0	+	+	+			
x^2-1	+	0	-	-	0	+	+		
$5-2x$	+	+	+	+	0	-	-		
D	-	0	+	0	-	0	+	0	-

۱۰. کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



خود محدودی بساز از دید بر خود در است



تابع نیست

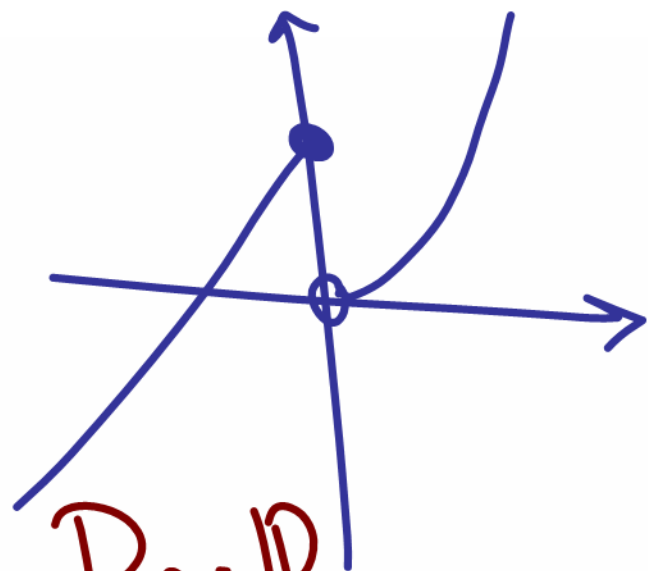
دستام من با خود زیر هم

دو تا نقد تو بر زیر هم



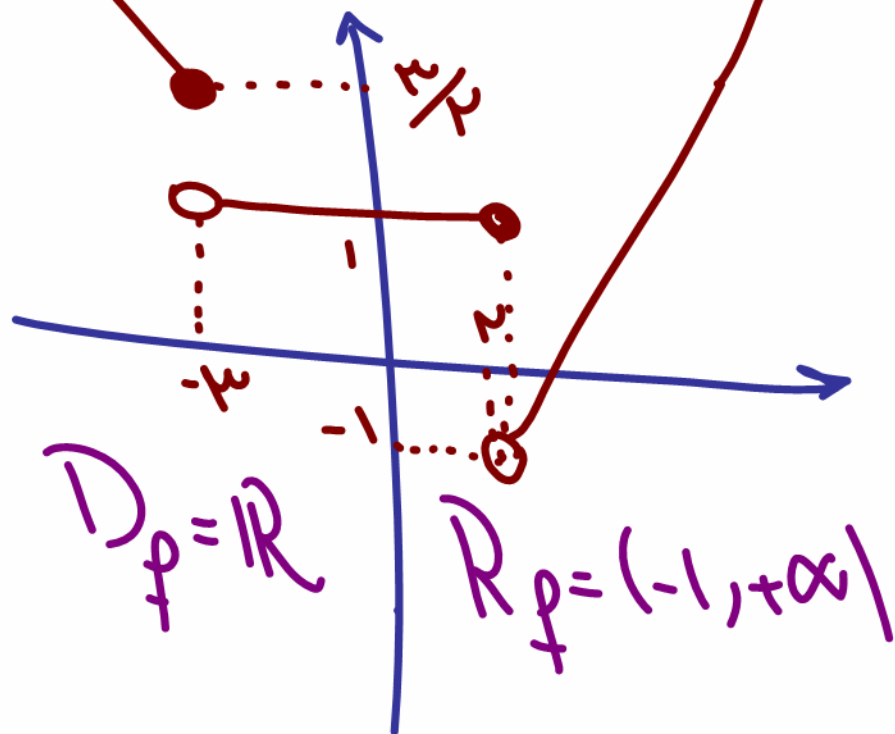
۱۱. نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید. مقادیر $f(0)$, $f(5)$, $g(2)$, $g(-\frac{1}{5})$ و $f(-2)$ را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$



$$D_f = \mathbb{R}$$
$$R_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$



$$D_g = \mathbb{R}$$
$$R_g = (-1, +\infty)$$

$$f(0) = 1$$
$$g(0) = 1$$
$$f(5) = 25$$
$$g(2) = 1$$
$$f(-2) = -5$$
$$g(-\frac{1}{5}) = 1$$



۱۲. رابطه $f = \{(2, -3), (2, a+b), (0, 1), (0, a-b), (1, 2), (3, 4)\}$ نمایش یک تابع است.

$$\begin{aligned} + a + b &= -3 \\ a - b &= 1 \\ \hline 2a &= -2 \rightarrow a = -1 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

الف) مقادیر a و b را به دست آورید.

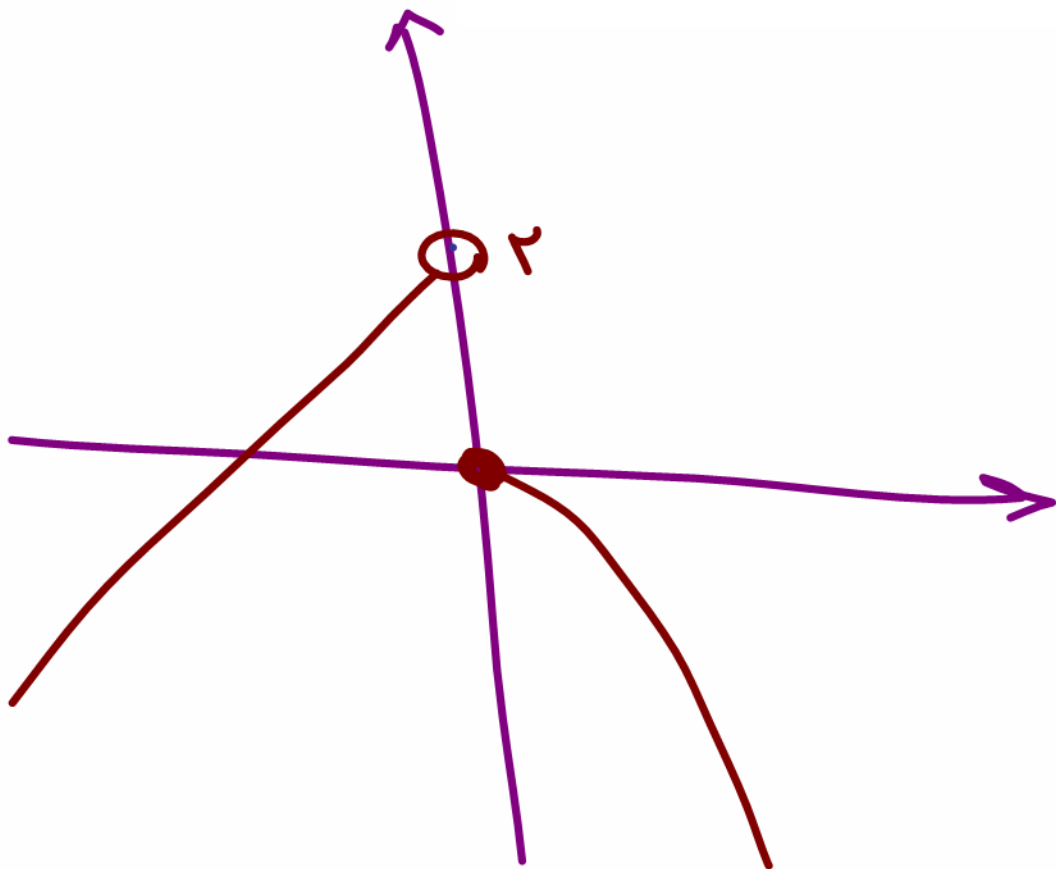
ب) دامنه و برد تابع f را به دست آورید.

$$\begin{aligned} D_f &= \{2, 0, 1, 3\} \\ R_f &= \{-3, 1, 2, 4\} \end{aligned}$$

تکراری بنیام ← آوردیم و ما هم تکراری!



۱۳. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x + 2 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، دامنه و برد تابع آن را به دست آورید.

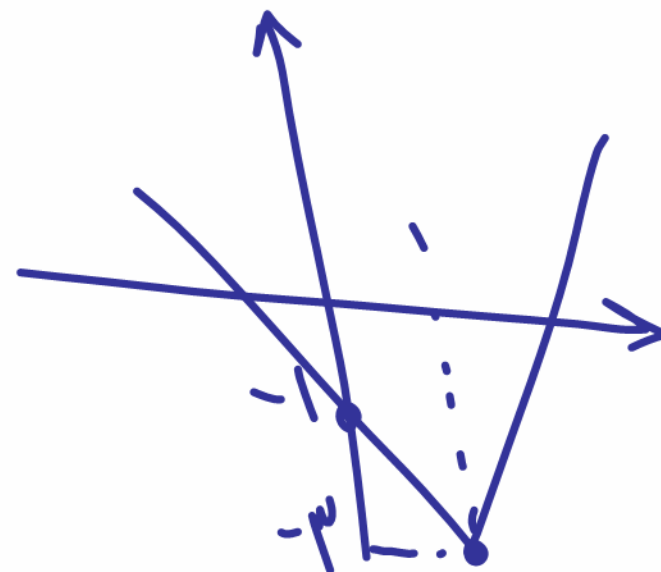
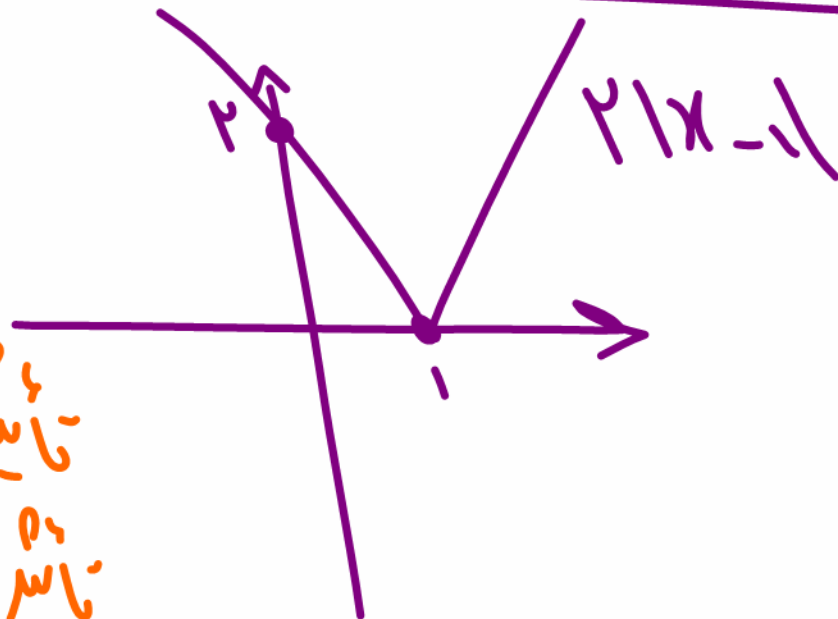
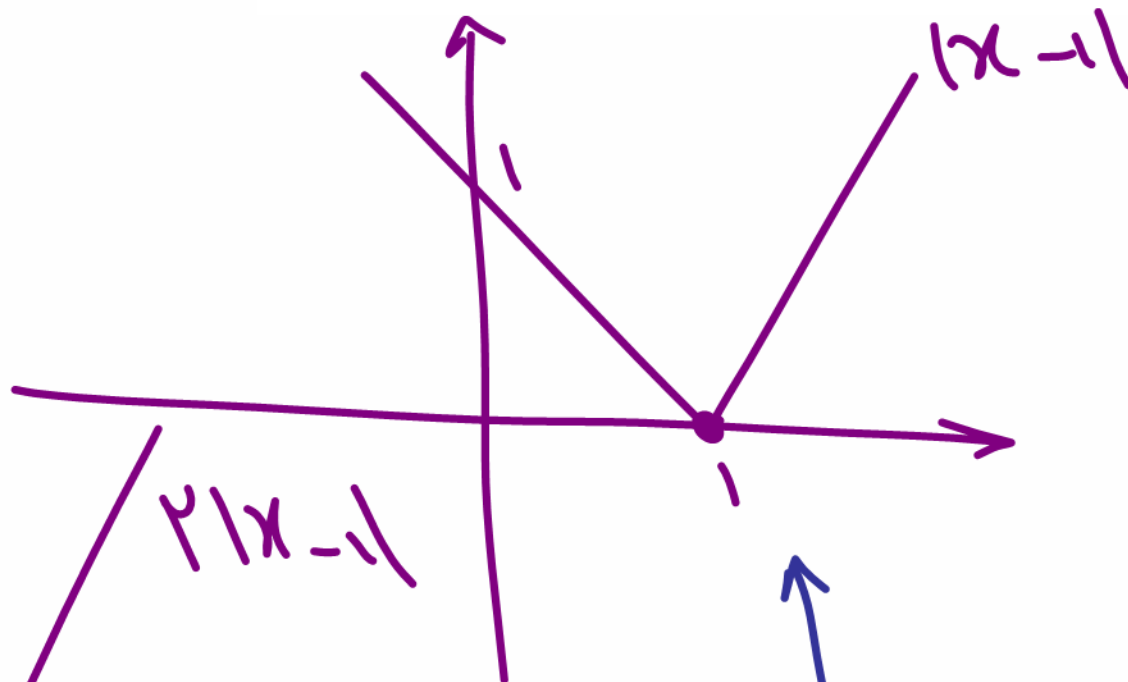
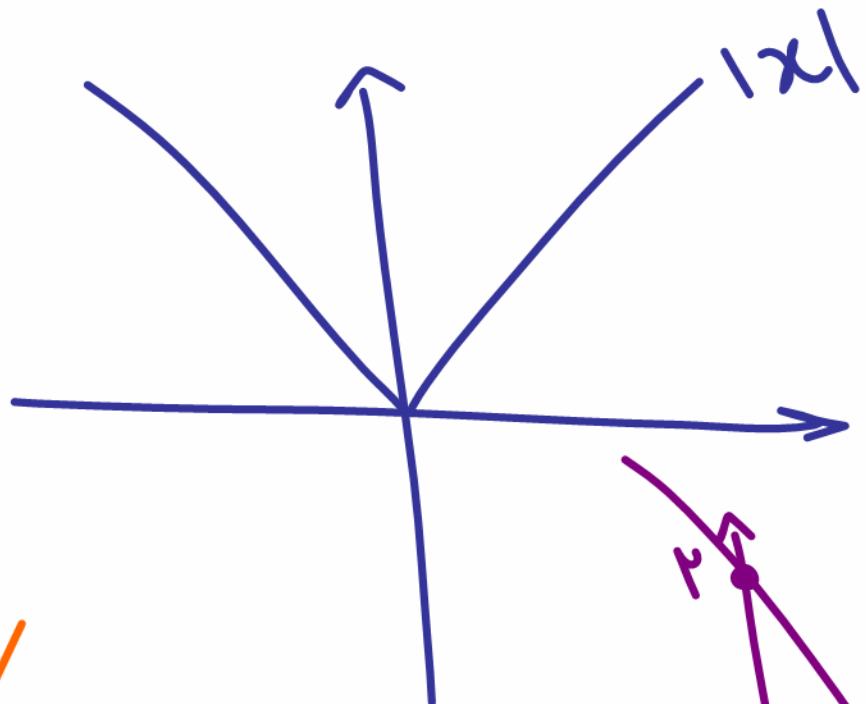


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = (-\infty, 2]$$



۱۴. نمودار تابع $f(x) = 2|x - 1| - 3$ را به کمک انتقال رسم کنید.



تأثیر روی x ها ← برعکس
تأثیر روی y ها ← مستقیم



$$\begin{aligned} x+1=0 &\rightarrow x=-1 \\ x-3=0 &\rightarrow x=3 \\ x^2+5 &\rightarrow x=-5 \end{aligned}$$

۱۵. دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید:

الف

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(x-3)}{x^2+5}} \geq 0$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{3x^5}{x^2 - 2x - 3} \neq 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array} \right.$$

		-1		3	
$x+1$	-	0	+		+
$x-3$	-		-	0	+
x^2+5	+		+		+
A	+	0	-	0	+

$$D_g = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

ب



۱۶. $f(x)$ یک تابع همانی و $g(x)$ یک تابع ثابت با برد $\{4\}$ است. مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \frac{f(2) + g(7)}{18} = \frac{2 + 4}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{f(x) - x}{g(x)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$g(x) = 4$$

$$f(x) = x$$



۱۷. با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

۱۲

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

۱۲

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

۱۲

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

۱۲

چیدن n شیء در n مکان

$$n!$$

چیدن n شیء در r مکان

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r}$$

$$\frac{n!}{(n-r)! r!}$$

زمانی که همه مرتباً تعداد همه

نه ترتیبشون

$$\frac{n!}{r!}$$



۱۸. گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5}$$

Handwritten calculation showing the sum of combinations:

$\binom{10}{3}$ is calculated as $\frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3}$

$\binom{10}{4}$ is calculated as $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

$\binom{10}{5}$ is calculated as $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$



۱۹. از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هر گاه:

$$\binom{6}{2} \binom{6}{2} \binom{6}{1}$$

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

الف

$$\binom{6}{1} \binom{6}{1} \binom{6}{1}$$

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

ب

پ) کمیته «۲» نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

پ

$$\binom{8}{1} \binom{11}{1} + \binom{8}{2}$$



۲۰. هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد».



۲۱. سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. $\{ (۱-۱), (۱-۲), (۱-۳), (۱-۴), (۱-۵), (۱-۶), (۲-۱), (۲-۲), (۲-۳), (۲-۴), (۲-۵), (۲-۶) \}$

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

$$A = \{ (۱-۲), (۱-۴), (۱-۶) \}$$

$$B = \{ (۱-۲), (۱-۴), (۱-۶), (۲-۱), (۲-۲), (۲-۳), (۲-۴), (۲-۵), (۲-۶) \}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{10}$$





۲۲. در جعبه‌ای ۵ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۴ مهره آبی وجود دارد. از این جعبه ۳ مهره به تصادف و با هم خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:

۵ سفید
۳ سیاه
۴ آبی

الف) حداقل ۲ مهره آبی باشد.

ب) هیچ مهره‌ای آبی نباشد.

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{1}{1} + \binom{4}{3}$$

$$n(S) = \binom{14}{3}$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \binom{1}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{14}{3}}$$

$$n(B) = \binom{1}{1} \binom{1}{2}$$
$$n(S) = \binom{14}{3}$$
$$P(B) = \frac{\binom{1}{1} \binom{1}{2}}{\binom{14}{3}}$$



۲۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A) = 0,4$ ، $P(B') = 0,7$ و $P(A \cup B) = 0,6$ ، مقدار $P(A \cap B)$ را به دست آورید.

$$P(B) = 0,3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,6 = 0,4 + 0,3 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0,1$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$0,4 - 0,1 = 0,3$$