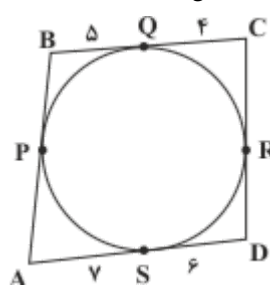
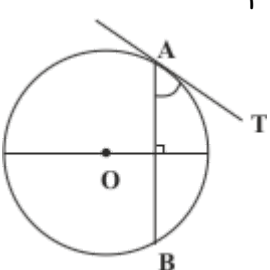
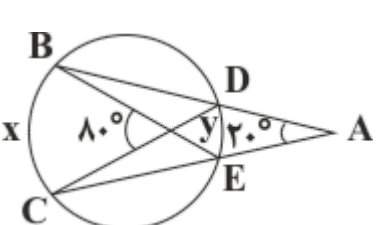
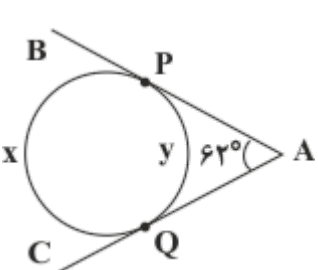
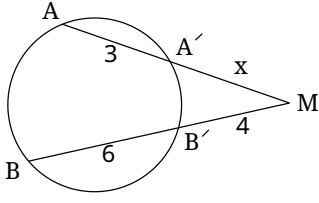
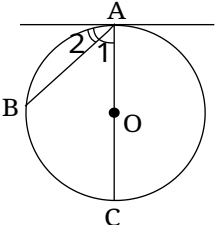
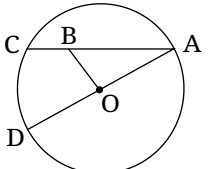
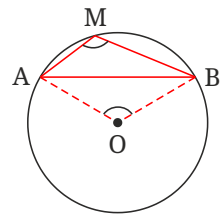
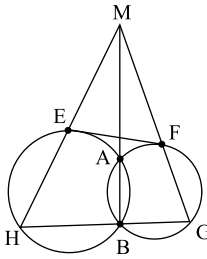
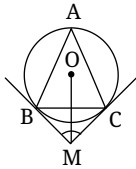
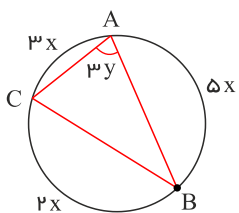
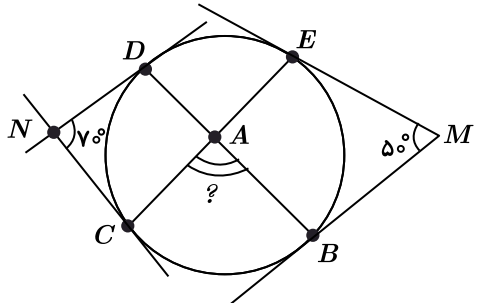
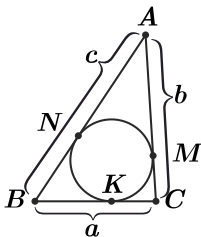
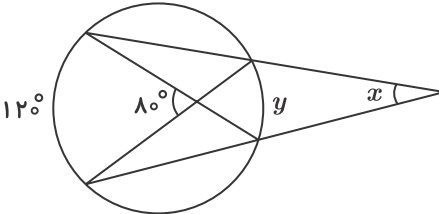
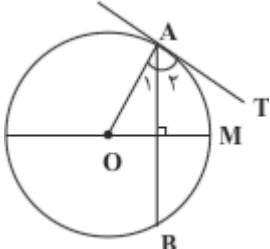
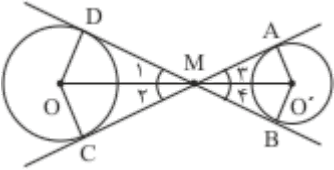


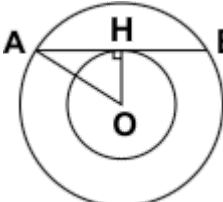
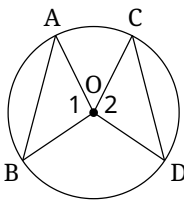
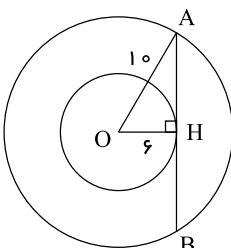
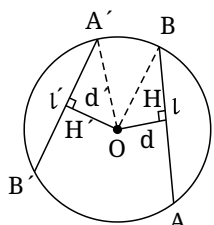
ردیف	نمره	
۱		در شکل زیر P, Q, R, S نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ با دایره هستند. مقدار محیط این چهارضلعی را به دست آورید. 
۲		زاویهٔ ظلی TAB در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که $\widehat{AB} = \frac{2}{3} \angle TAB$. 
۳	۱.۵	در هر کدام از شکل‌های زیر x و y را بیابید.
		الف 
		ب 
۴		ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره هم‌مرس هستند.
۵		دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع ۳ و ۵ مفروض هستند. اندازهٔ وترى از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است را به دست آورید.
۶		ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی باهم برابرند.

ردیف	نمونه
۷	در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید. 
۸	مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المركزین $d = 13$ برابر $5a - 3$ باشد.
۹	شعاع‌های دو دایره هم‌مرکز ۱۰ و ۶ سانتی‌متر هستند. اندازه وترى از دایره بزرگ‌تر را که بر دایره کوچک‌تر مماس است به دست آورید.
۱۰	قضیه: ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است، و بالعکس.
۱۱	در شکل مقابل اندازه زاویه ظلی A_2 برابر 50° است. اندازه کمان $\widehat{BC}$ بر حسب درجه چقدر است؟ 
۱۲	در دایره‌ای به مرکز O، قطر AD، وتر AC و نقطه B بر این وتر، چنان انتخاب شده‌اند که هریک از زوایای $\widehat{ABO}$ و $\widehat{COD}$ به اندازه 60° هستند. اگر $OB = 5\text{ cm}$ آنگاه طول وتر AC چقدر است؟ 
۱۳	در مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت دایره محیطی چند برابر مساحت دایره محاطی داخلی است؟
۱۴	در شکل مقابل O مرکز دایره است و داریم: $\widehat{AOB} = \widehat{AMB}$. اندازه زاویه AMB را محاسبه کنید. 

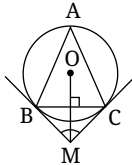
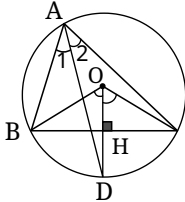
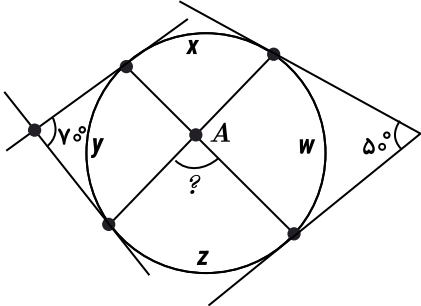
ردیف	نمره	
۱۵		در شکل زیر، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند و M نقطه‌ای بر امتداد پاره‌خط AB است. اگر دو قاطع MH و MG را رسم کنیم، چهارضلعی $EFGH$ همواره: 
۱۶		سه نیمساز داخلی چهارضلعی $ABCD$ هم‌رس هستند. اگر اندازه‌های اضلاع آن $AB = 3a - 1$ و $BC = 5a - 3$ و $CD = 4a$ و $AD = a^2 + 2$ باشد، مقدار a کدام است؟
۱۷		در شکل مقابل MB و MC مماس بر دایره، $AB = AC$ و $\widehat{AC} = 140^\circ$ است. زاویه OMC چقدر است؟ 
۱۸		در یک شش‌ضلعی منتظم به محیط $12\sqrt{3}$ فاصله مرکز دایره محیطی آن تا یکی از اضلاع شش‌ضلعی چقدر است؟
۱۹		اندازه x و y را در دایره مقابل تعیین کنید. 
۲۰		ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.
۲۱	۱.۵	در شکل زیر اضلاع زاویه‌های M، N بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه $\widehat{A}$ چند درجه است؟ 

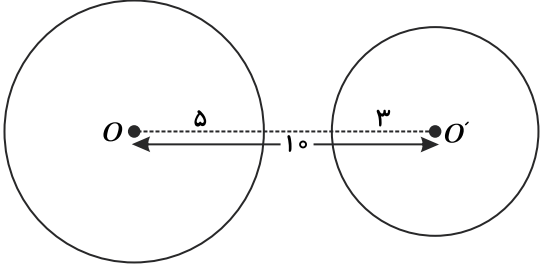
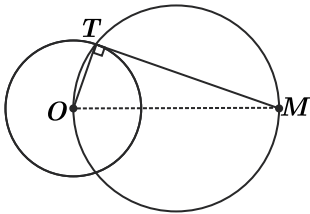
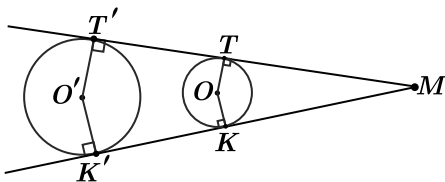
ردیف	نمره	
۲۲	۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف: دو دایره $C(O, 5)$, $C'(O', 3)$ و $OO' = 10$ متخارج هستند. ب: از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ مماس MT را در نقطه T بر دایره رسم کرده‌ایم، دایره‌ای به قطر OM از T عبور می‌کند. ج: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $OO' = d$ مماس درون هستند. هرگاه: $d = R - R'$ د) هرگاه دو مماس مشترک خارجی دو دایره متقاطع باشند نقطه تقاطع روی خط شامل OO' خواهد بود.
۲۳	۱.۵	طرز رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره به کمک خط‌کش و پرگار را با ذکر دلیل توضیح دهید.
۲۴	۱.۵	اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M, N و K باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع زاویه A باشند ثابت کنید: $AM = AN = p - a$ (p نصف محیط مثلث) 
۲۵	۱	با توجه به شکل، مقدار x را محاسبه کنید. 

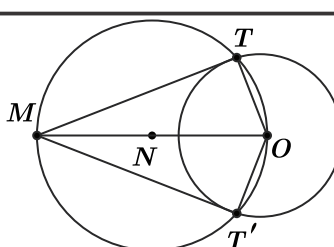
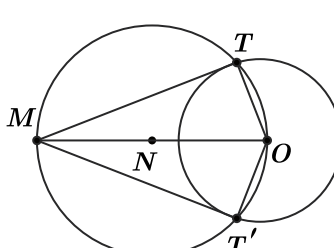
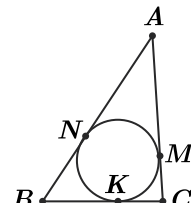
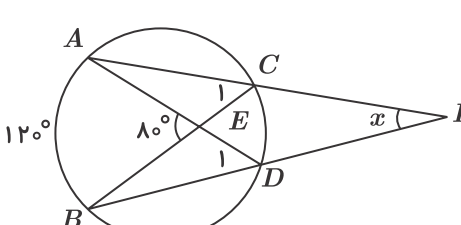
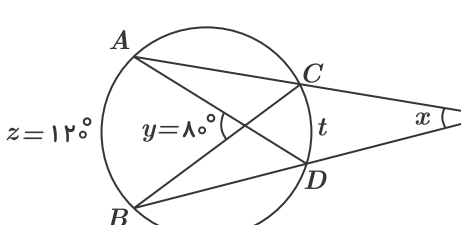
ردیف	نمره	
۱		از هریک از نقاط D, A, B, C دو مماس بر دایره رسم شده پس طول آن‌ها برابر است. بنابراین: $BQ = BP = ۵, CQ = CR = ۴, DS = RD = ۶, AS = AP = ۷$ بنابراین محیط چهارضلعی از رابطه زیر به دست می‌آید: $AB + BC + CD + AD = ۱۲ + ۹ + ۱۰ + ۱۳ = ۴۴$
۲		با توجه به شکل زیر داریم:  $\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{O} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{O}$ از طرفی $\hat{O}$ زاویه مرکزی مقابل به کمان است پس $\hat{O} = \widehat{AM}$ از طرفی می‌دانیم که قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند پس $\widehat{AM} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ بنابراین $\hat{O} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ پس $\hat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{AB}$
۳	۱.۵	
		الف $\begin{cases} ۸۰^\circ = \frac{x+y}{2} \rightarrow x+y = ۱۶۰^\circ \\ ۲۰^\circ = \frac{x-y}{2} \rightarrow x-y = ۴۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۰۰^\circ \\ y = ۶۰^\circ \end{cases}$
		ب $\begin{cases} x+y = ۳۶۰^\circ \\ \frac{x-y}{2} = ۶۲^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = ۳۶۰^\circ \\ x-y = ۱۲۴^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲۴۲^\circ \\ y = ۱۱۸^\circ \end{cases}$
۴		مماس‌های مشترک داخلی BD, AC همدیگر را در M قطع می‌کنند. M را به O, O' وصل می‌کنیم. اگر ثابت کنیم $\hat{MOO'}$ نیم‌صفحه است یعنی نقاط M, O, O' روی یک خط راست قرار دارند.  $\begin{cases} OC = OD \\ MC = MD \Rightarrow \triangle OMD \cong \triangle OMC \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{cases}$ $\begin{cases} O'A = O'B \\ MA = MB \Rightarrow \triangle O'AM \cong \triangle O'BM \Rightarrow \hat{M}_3 = \hat{M}_4 \\ O'M = O'M \end{cases}$ از طرفی چون زوایای $\hat{AMB}, \hat{DMC}$ متقابل به رأس هستند پس: $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{M}_3 + \hat{M}_4 \Rightarrow 2\hat{M}_1 = 2\hat{M}_3 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3 = \hat{M}_4$ چون زوایای $\hat{AMO'}, \hat{OMC}$ برابرند و در رأس M مشترکند و دو ضلع از آنها با هم در یک امتداد قرار دارند دو ضلع دیگر طبق قضیه زوایای متقابل به رأس باید در یک امتداد باشند یعنی MO', OM در یک امتداد هستند پس $\hat{MOO'} = ۱۸۰^\circ$ می‌باشد بنابراین محل تلاقی دو مماس مشترک داخلی روی خط‌المرکزین قرار دارد پس همگی هم‌رس هستند.

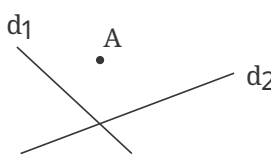
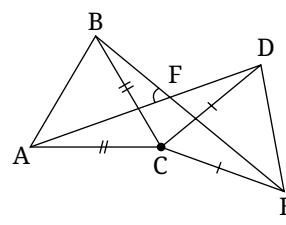
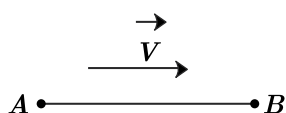
ردیف	نمونه
۵	با توجه به شکل داریم:  $AH^2 = OA^2 - OH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AH = 4$ $BH = AH = 4 \Rightarrow AB = 8$
۶	$\begin{cases} \text{فرض: } AB = CD \\ \text{حکم: } \widehat{AB} = \widehat{CD} \end{cases}$  $\begin{cases} OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض ض. ض.}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$ فرض $AB = CD$ $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$
۷	طبق روابط طولی در دایره داریم: $x(x + 3) = 4 \times 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (ق ق)} \\ x = -8 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$
۸	$R = 3$ و $R' = 8$ و $d = 13$ $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 5a - 3 = \sqrt{13^2 - (8 - 3)^2}$ $\Rightarrow 5a - 3 = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow a = 3$
۹	AB وتری از دایره بزرگ تر بوده که بر دایره کوچک تر مماس است. بنابراین شعاع OH بر AB عمود است. در نتیجه $AH = HB$ پس: $AH^2 = OA^2 - OH^2 \rightarrow AH^2 = 10^2 - 6^2$ $\rightarrow AH^2 = 64 \rightarrow AH = 8 \rightarrow AB = 16$ 
۱۰	برهان: از مرکز دایره عمودهای OH و OH' را بر وترهای $AB = l$ و $A'B' = l'$ وارد می کنیم. می دانیم شعاع عمود بر یک وتر آن وتر را نصف می کند. $(OH' = d', OH = d)$ $\triangle OHB : OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow R^2 = d^2 + \frac{l^2}{4}$ $\triangle OH'A' : OA'^2 = OH'^2 + H'A'^2 \Rightarrow R^2 = d'^2 + \frac{l'^2}{4}$  $l > l' \Leftrightarrow l^2 > l'^2 \Leftrightarrow R^2 - \frac{l^2}{4} < R^2 - \frac{l'^2}{4} \Leftrightarrow d^2 < d'^2 \Leftrightarrow d < d'$

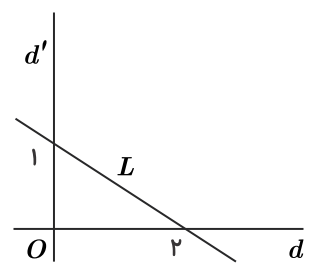
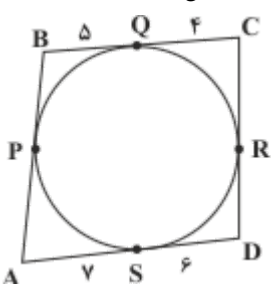
ردیف	نمره	
۱۱		در شکل، AC قطر دایره است. قطر، محیط دایره را به دو قسمت برابر تقسیم می‌کند. یعنی هر کدام از این کمان‌ها برابر با 180° است، داریم: $\hat{A}_r = 50^\circ \Rightarrow \hat{AB} = 100^\circ \Rightarrow \hat{BC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ (ظلی)
۱۲		زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}$ محاطی و مرکزی روبه‌رو به یک کمان هستند پس زاویه $\hat{A}$ نصف $\hat{C}$ است یعنی $\hat{A} = 30^\circ$. حال در مثلث OBA چون $\hat{B} = 60^\circ$ است پس زاویه $\hat{O} = 90^\circ$ می‌شود و در نتیجه $\hat{O}_1 = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ و همچنین در مثلث OAC داریم $\hat{A} = \hat{C} = 30^\circ$، پس مثلث OBC متساوی‌الساقین است و $BC = OB = 5cm$ و از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OAB، ضلع OB روبه‌رو زاویه 30° بوده و نصف وتر است، پس $AB = 10cm$ و در نتیجه $AC = 10cm + 5cm = 15cm$
۱۳		در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول a داریم: $R = \frac{2}{3} \times h = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ $r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3}{2} a} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \Rightarrow \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = (2)^2 = 4$
۱۴		$\hat{AOB} = \hat{AMB}$ (محاطی)، $\hat{AMB} = \frac{\hat{AB}}{2}$، $\hat{AOB} = \hat{AMB}$ (مرکزی) $\Rightarrow \hat{AMB} = \frac{\hat{AB}}{2} \Rightarrow \hat{AB} = 2\hat{AMB}, \hat{AB} + \hat{AMB} = 360^\circ \Rightarrow \hat{AMB} = 120^\circ$
۱۵		طبق قضیه عکس روابط طولی، از چهار نقطه E, F, G, H یک دایره می‌گذرد، پس $EFGH$ محاطی است. $\left\{ \begin{array}{l} MA \times MB = ME \times MH \\ MA \times MB = MF \times MG \end{array} \right. \Rightarrow ME \times MH = MF \times MG$
۱۶		چون سه نیمساز داخلی هم‌رس هستند، پس نیمساز چهارم هم از محل هم‌رسی می‌گذرد پس چهارضلعی محاطی است. در چهارضلعی محاطی مجموع اضلاع روبه‌رو برابرند. داریم: $AB + CD = AD + BC \Rightarrow 3a - 1 + 4a = 5a - 3 + a^2 + 2 \Rightarrow a^2 - 2a = 0$ $\Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 2$
۱۷		در مثلث ABC داریم:

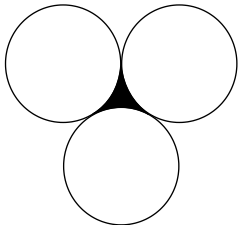
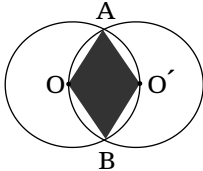
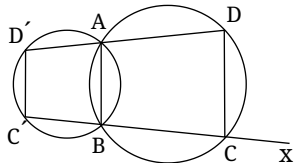
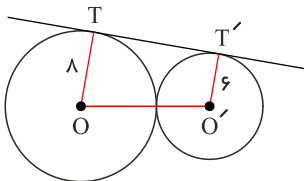
ردیف	نمره	
		$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 360^\circ - 2 \times 140^\circ = 80^\circ$  $\widehat{BMC} = \frac{\widehat{BAC} - \widehat{BC}}{2} = \frac{2 \times 140^\circ - 80^\circ}{2} = 100^\circ$ چون O از B و C به یک فاصله است، پس OM نیمساز $\widehat{BMC}$ است: $\widehat{OMC} = \frac{\widehat{BMC}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$
۱۸		فاصله مرکز دایره محیطی شش ضلعی منتظم تا یک ضلع برابر ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع است. زیرا شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل می شود. $محیط = 12\sqrt{3} \Rightarrow 6a = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$ $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3}) = 3$
۱۹		$2x + 3x + 5x = 360^\circ \Rightarrow 10x = 360^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$ $3y = \frac{2x}{2} \Rightarrow 3y = x = 36^\circ \Rightarrow y = \frac{36^\circ}{3}$ زاویه محاطی
۲۰		عمود منصف BC از O مرکز دایره محیطی می گذرد. داریم:  $\widehat{BOH} = \widehat{COH} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \widehat{BD} = \widehat{CD}$ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{4} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2}$ بنابراین محل برخورد نیمساز زاویه A وسط کمان BC می باشد که همان محل برخورد عمود منصف BC با محیط دایره است.
۲۱	۱.۵	$\left. \begin{aligned} \frac{x+w+z-y}{2} &= 70^\circ \\ \frac{x+y+z-w}{2} &= 50^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2x+2z}{2} = 120^\circ \Rightarrow x+z = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \frac{x+z}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$  (صفحه ۱۷ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: اگر کمان ها با حروف کوچک نامگذاری نشده باشد و با همان حروف بزرگ روی شکل سؤال حل شده بود نمره کامل تعلق می گیرد:

ردیف	نمره	
	۱.۵	$\left. \begin{array}{l} \frac{x+w+z-y}{2} = 70^\circ \text{ یا } \frac{\widehat{DEBC} - \widehat{DC}}{2} = 70^\circ \text{ (نمره ۵)} \\ \frac{x+y+z-w}{2} = 50^\circ \text{ یا } \frac{\widehat{EDCB} - \widehat{BE}}{2} = 50^\circ \text{ (نمره ۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} = 60^\circ \text{ (نمره ۵)}$
۲۲	۱	(الف) درست؛ چون $R + R' = ۸ > d = ۱۰$ است. پس دو دایره متخارج هستند.  (صفحه ۲۰ کتاب درسی) (ب) درست؛ چون شعاع در نقطه تماس T بر خط مماس عمود است. پس دایره‌ای به قطر OM از T عبور می‌کند.  (صفحه ۱۹ کتاب درسی) (ج) نادرست؛ ممکن است $R < R'$ باشد و در این حالت $d < ۰$ خواهد شد. نکته: اگر $d = R - R'$ می‌توان نتیجه گرفت که دو دایره مماس درون هستند. (صفحه ۲۲ کتاب درسی) (د) درست؛ اگر نقطه تقاطع را M و نقاط تماس T و K و T' و K' باشند، O و O' روی نیمساز $\widehat{MK}$ قرار می‌گیرند، زیرا:  $\left. \begin{array}{l} OT = OK \rightarrow O \text{ روی نیمساز } \widehat{MK} \text{ است.} \\ OT' = OK' \rightarrow O' \text{ روی نیمساز } \widehat{MK} \text{ است.} \end{array} \right\} \rightarrow O, O', M \text{ هم خط اند.}$ (صفحه ۱۸ تا ۲۳ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) درست (۲۵/۵ نمره) (ب) درست (۲۵/۵ نمره) (ج) نادرست (۲۵/۵ نمره) (د) درست (۲۵/۵ نمره)

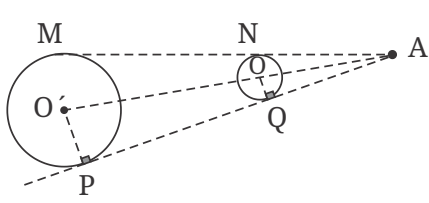
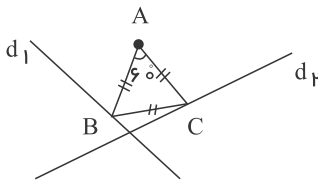
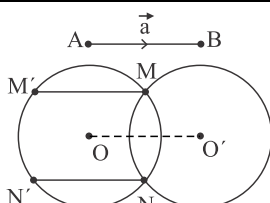
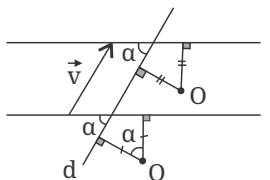
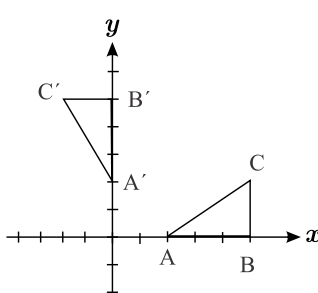
ردیف	نمره	
۲۳	۱.۵	دایره‌ای به مرکز O و نقطه‌ای مانند M خارج از آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم، این دایره، دایرهٔ مفروض را در دو نقطهٔ T و T' قطع می‌کند. هر دو زاویهٔ $\widehat{MTO}$ و $\widehat{MT'O}$ محاطی روبه‌رو به قطر هستند. بنابراین قائمه می‌شوند و چون شعاع‌های OT و OT' بر MT و MT' عمود شده‌اند. بنابراین MT و MT' هر دو مماس بر دایرهٔ مفروض هستند.  (صفحه ۱۹ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: رسم شکل فرضی (۵/۵ نمره) دایره‌ای به مرکز O و نقطه‌ای مانند M خارج از آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم، این دایره، دایرهٔ مفروض را در دو نقطهٔ T و T' قطع می‌کند. (۵/۵ نمره) (محاطی روبه‌رو به قطر) $\widehat{MTO} = \widehat{MT'O} = 90^\circ$ $\Rightarrow MT, MT'$ مماس بر دایره هستند (۵/۵ نمره) 
۲۴	۱.۵	فرض کنیم نصف محیط برابر p باشد می‌دانیم اگر از نقطه‌ای خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول مماس‌ها برابر است بنابراین: $2p = AB + AC + BC \Rightarrow$ $2p = \underline{AN} + \underline{BN} + \underline{AM} + \underline{MC} + \underline{BK} + \underline{CK} \Rightarrow$ $2p = 2AM + 2BK + 2CK \Rightarrow p = AM + BC \Rightarrow AM = p - a$  (۵/۵ نمره) $AM = AN, BN = BK, CM = CK$ (۵/۵ نمره) $2p = AB + AC + BC = AN + NB + AM + MC + BK + CK$ (۵/۵ نمره) $\Rightarrow 2p = 2AM + 2BK + 2CK \Rightarrow p = AM + BC \Rightarrow AM = p - a$ (صفحه ۳۰ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:
۲۵	۱	روش اول: $\frac{120^\circ + y}{2} = 80^\circ, \frac{120^\circ - y}{2} = x \Rightarrow y = 40^\circ, x = 40^\circ$ روش دوم: با استفاده از ویژگی‌های زاویهٔ محاطی و زاویهٔ خارجی داریم: $80^\circ = \hat{C}_1 + \hat{A} = \frac{120^\circ}{2} + \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 20^\circ (*)$ $\left. \begin{aligned} \hat{D}_1 &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \\ \hat{D}_1 &= \hat{A} + x \stackrel{(*)}{=} 20^\circ + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 40^\circ$  روش سوم:  $z = 120^\circ, y = 80^\circ$ $y = \frac{z+t}{2}, x = \frac{z-t}{2} \Rightarrow x+y = z \Rightarrow x+80^\circ = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$

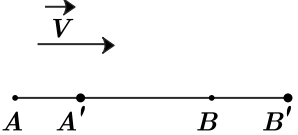
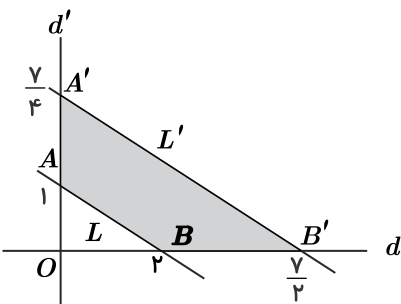
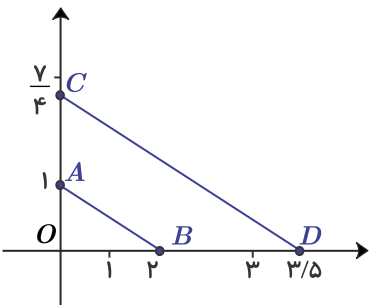
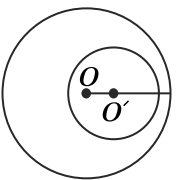
ردیف	نمره	
۱		دو دایره با شعاع‌های متفاوت با چند تبدیل ممکن است بر روی هم تصویر شوند؟
۲		تصویر یک خط تحت یک تبدیل بر همان خط منطبق است. این تبدیل چه تبدیل‌هایی می‌تواند باشد؟
۳		اگر بخواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی به رأس A طوری رسم کنیم که دو رأس دیگر آن بر d_1 و d_2 قرار گیرد، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟ 
۴		دایره $C(O, R)$ و پاره‌خط AB در صفحه مفروض‌اند. در دایره C وتر موازی و مساوی AB رسم می‌کنیم. حداکثر چند وتر می‌توان یافت؟
۵		ترکیب یک دوران و یک انتقال کدام است؟
۶		اگر زاویه بین خط و دوران یافته آن α باشد، با دوران دادن هر دو خط تحت زاویه $90^\circ - \alpha$ ، زاویه بین خطوط دوران یافته کدام است؟
۷	۲	نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 0)$ و $C(5, 2)$ رأس‌های یک مثلث هستند. الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه $90^\circ +$ رسم کنید. ب) طول و شیب ضلع AC و تصویرش را به دست آورده و باهم مقایسه کنید.
۸		در شکل روبه‌رو، مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle DEC$ متساوی‌الاضلاع هستند. الف) با کدام تبدیل و به چه صورت نقطه A بر B و نقطه D بر E تصویر می‌شود؟ ب) با استفاده از ویژگی‌های تبدیل قسمت (الف)، ثابت کنید که: $AD = BE$ و $\angle AFB = 60^\circ$. 
۹	۱	با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره‌خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند. $(\vec{V} \parallel AB)$ و اندازه $\vec{V}$ از اندازه پاره‌خط AB کوچک‌تر است. 

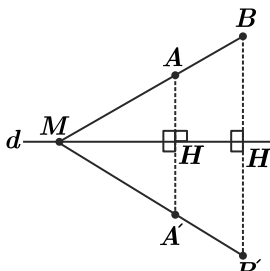
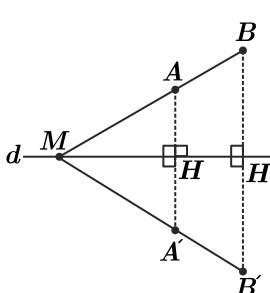
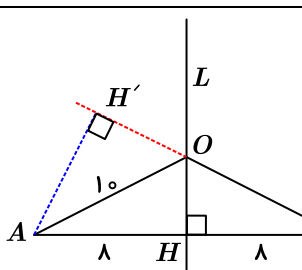
ردیف	نمره	
۱۰	۱.۵	در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم؛ مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟ 
۱۱	۱	جاهای خالی را با کلمات (عبارات) مناسب کامل کنید. الف) اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس یک چندضلعی عبور کند، دایره را می‌نامیم. ب) وضعیت نسبی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ درحالتی که $R - R' < OO'$ به صورت است. ج) یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن باشند. د) تبدیلهایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات نامیده می‌شوند.
۱۲	۱.۵	در حالتی که پاره‌خط AB با محور بازتاب d، نه موازی و نه متقاطع باشد، ثابت کنید تبدیل بازتاب محوری نسبت به d، ایزومتري است.
۱۳	۱	جاهای خالی را تکمیل کنید.
		الف) نتیجه حاصل از دو بازتاب متوالی با محورهای بازتاب موازی، یک تبدیل است.
		ب) در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K، اگر باشد؛ تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را انبساط می‌نامیم.
۱۴	۱.۲۵	نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط L و $OA = ۱۰$ باشد، تعیین کنید فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟
۱۵	۱	در هر قسمت، پاسخ مناسب را بنویسید.
		الف) شیب خط ، همواره حفظ می‌شود. (انتقال، دوران)
		ب) دورانی به مرکز O و زاویه ، تبدیلی همانی است. $(۱۸۰^\circ, ۳۶۰^\circ)$
۱۶		در شکل زیر P, Q, R, S نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ با دایره هستند. مقدار محیط این چهارضلعی را به دست آورید. 

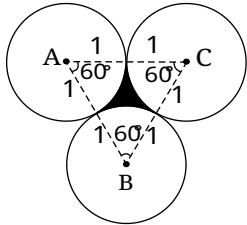
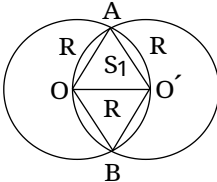
ردیف	نمره	
۱۷		سه دایره، هر کدام به شعاع یک، دو به دو برهم مماس خارج هستند، مساحت ناحیه محصور بین این سه دایره چقدر است؟ 
۱۸		دو دایره متساوی $C(O, R)$ و $C'(O', R)$ در نقاط A و B متقاطع اند و هریک از آنها از مرکز دایره دیگر می‌گذرد. مساحت رنگ شده چقدر است؟ 
۱۹		از نقاط A و B نقاط تقاطع دو دایره O و O' دو قاطع چنان رسم کرده‌ایم که دایره O' را در نقاط D' و C' قطع کرده‌اند. نوع چهارضلعی $DCC'D'$ چیست؟ 
۲۰		در شکل روبه‌رو دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ مماس خارج و TT' مماس مشترک خارجی آنهاست. محیط و مساحت $OTT'O'$ چقدر می‌شود؟ 
۲۱		ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.
۲۲	۱.۵	ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محاطی باشد، آنگاه دو زاویه مقابل آن مکمل هستند.
۲۳	۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف: دو دایره $C(O, 5)$، $C'(O', 3)$ و $OO' = 10$ متخارج هستند. ب: از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ مماس MT را در نقطه T بر دایره رسم کرده‌ایم، دایره‌ای به قطر OM از T عبور می‌کند. ج: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $OO' = d$ مماس درون هستند. هرگاه: $d = R - R'$ د) هرگاه دو مماس مشترک خارجی دو دایره متقاطع باشند نقطه تقاطع روی خط شامل OO' خواهد بود.

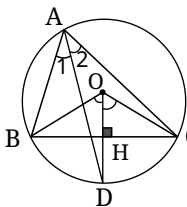
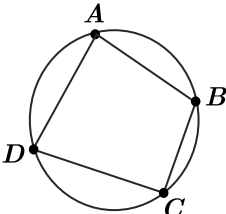
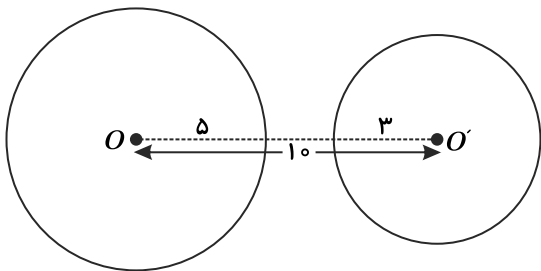
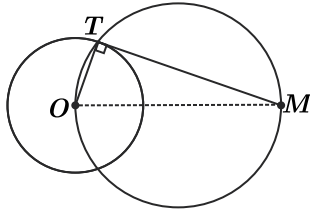
ردیف	نمره	
۲۴	۱.۵	از نقطه M خارج دایره‌ای مماس MT به طول $8\sqrt{2}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (T روی دایره است). همچنین خطی از M گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است به طوری که $MA < MB$ و $AB = 28$. طول‌های MA و MB را بیابید.
۲۵	۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را معلوم کنید.
		الف) کایت (شبه‌لوزی)، یک چهارضلعی محیطی است.
		ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر $\sqrt{2}RR'$ است.
		پ) هر تبدیلی که اندازه زاویه را حفظ کند، تبدیلی طولیا (ایزومتري) است.
		ت) نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای بازتاب موازی، یک تبدیل انتقال است.

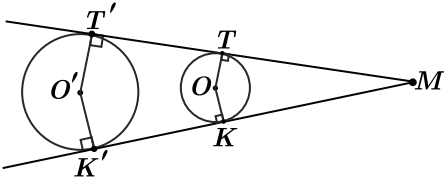
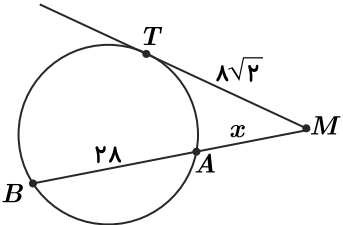
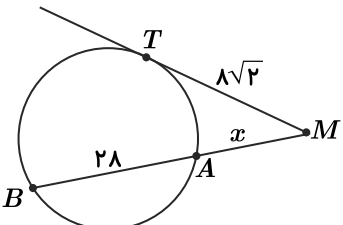
ردیف	نمونه
۱	دو دایره دارای شعاع‌های متفاوتند پس تنها به وسیلهٔ تجانس می‌توان دو دایره را برهم منطبق کرد. مطابق شکل تجانس با مرکزیت محل برخورد مماس‌های خارجی و خط‌المکزی و همچنین ضریب تجانس $k = \frac{AO'}{AO}$ می‌توان دو دایره را برهم منطبق کرد. 
۲	اگر مرکز تجانس روی خط قرار گیرد، مجانس خط بر آن منطبق می‌شود. اگر محور بازتاب، همان خط یا محور عمود بر خط باشد، بازتاب خط بر خود آن منطبق خواهد شد. با انتقال خط تحت برداری موازی با خط، تصویر انتقال بر خط منطبق خواهد شد.
۳	مطابق شکل، اگر $\triangle ABC$ پاسخ مسأله باشد، داریم: $BC = AB = AC$. مشخص است که C دوران یافته B به مرکز A و زاویه 60° است. پس برای یافتن C، d_1 را به مرکز A و شعاع 60° دوران می‌دهیم تا d_2 را در C قطع کند. به همین ترتیب با دوران C به مرکز A و زاویه -60°، نقطه B به دست می‌آید. 
۴	پاسخ: مطابق شکل، دایره C را با بردار $\vec{AB} = \vec{a}$ انتقال می‌دهیم تا دایره‌ای به مرکز O' و شعاع R به دست آید. دو دایره حداکثر در دو نقطه (N و M) می‌توانند متقاطع باشند. MM' و NN' وترهای موازی با AB و به طول a می‌باشند. 
۵	مطابق شکل به مرکز O و زاویه α خط d را دوران می‌دهیم تا خط d' به دست آید. خط d' را تحت بردار $\vec{v}$ انتقال می‌دهیم تا خط d'' به دست آید. چون d'' انتقال یافته d' است، پس با آن موازی است، پس زاویه بین d و d'' است. بنابراین، تحت زاویه α و به مرکز نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویه بین d و d'' می‌توان d را دوران داد تا d'' به دست آید. 
۶	می‌دانیم که تحت یک دوران، زاویه بین خط و دوران یافته آن همان زاویه دوران است. بنابراین پس از دوران هم زاویه بین دو خط α خواهد بود.
۷	پاسخ: الف) با توجه به شکل در این دوران داریم: $\begin{cases} A(2, 0) \rightarrow A'(0, 2) \\ B(5, 0) \rightarrow B'(0, 5) \\ C(5, 2) \rightarrow C'(-2, 5) \end{cases}$  ب) $\left. \begin{aligned} AC &= \sqrt{(5-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} \\ A'C' &= \sqrt{(-2-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC = A'C'$ $\left. \begin{aligned} m_{AC} &= \frac{2-0}{5-2} = \frac{2}{3} \\ m_{A'C'} &= \frac{5-2}{-2-0} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AC} \neq m_{A'C'}$

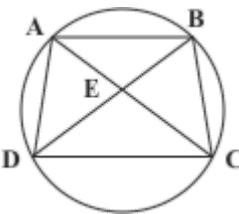
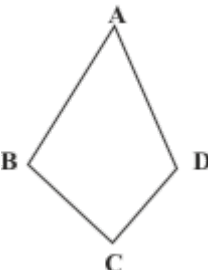
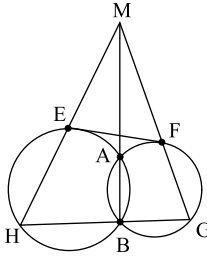
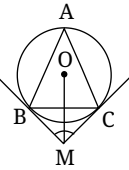
ردیف	نمره	
۸		الف) پس می‌توان گفت که نقطه B دوران یافته A به مرکز C و زاویه 60° - است. به همین ترتیب: $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع $\Rightarrow \hat{ACB} = 60^\circ$, $AC = CB$ نتیجه می‌گیریم که نقطه E دوران یافته D به مرکز C و زاویه 60° - است. ب) با استفاده از قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که AD تحت دوران به مرکز C و زاویه 60° - روی BE تصویر می‌شود. دوران طولی است، پس $AD = BE$. همچنین می‌دانیم که زاویه بین خط و دوران یافته آن به اندازه دوران است، پس: $\hat{AFB} = 60^\circ$. $\begin{cases} T(A) = B \\ T(D) = E \end{cases} \rightarrow T(AD) = BE$
۹	۱	$\vec{V}$ $\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = BB' + A'B \end{cases} \xrightarrow{AA'=BB'} AB = A'B'$ 
۱۰	۱.۵	روش اول:  $\frac{OA'}{OA} = \frac{y}{4} \rightarrow OA' = \frac{y}{4}$ $\frac{OB'}{OB} = \frac{y}{4} \rightarrow OA' = \frac{y}{4}$ $S = S_{\triangle OA'B'} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{4} \times \frac{y}{4} \right) - \frac{1}{2} (1 \times 2) = \frac{33}{16}$ روش دوم:  $\frac{S_{CDO}}{S_{ABO}} = k^2 = \frac{49}{16}$ $\frac{S_{CDO} - S_{ABO}}{S_{ABO}} = \frac{49 - 16}{16} = \frac{33}{16}$ $S_{ABO} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \Rightarrow S_{ABDC} = \frac{33}{16}$
۱۱	۱	الف) اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس یک چندضلعی عبور کند، دایره را محیطی و چندضلعی را محاطی می‌نامند. (صفحه ۲۴ کتاب درسی) ب) وضعیت نسبی دو دایره $C(O', R')$ و $C(O, R)$ درحالتی که $d = OO' < R - R'$ باشد، به صورت متداخل است. (صفحه ۲۰ کتاب درسی) 

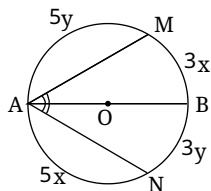
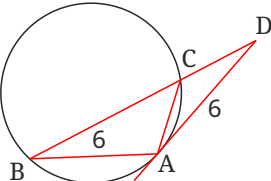
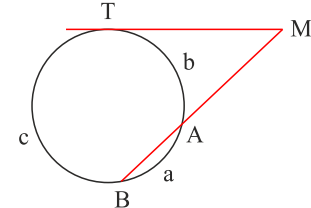
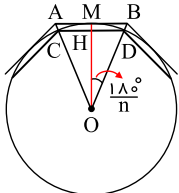
ردیف	نمره	
	۱	(ج) قضیه: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. (صفحه ۲۷ کتاب درسی) (د) تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولیا (ایزومتري) نامیده می‌شوند. (صفحه ۳۴ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) دایره محیطی (۰/۲۵ نمره) ب) متداخل (۰/۲۵ نمره) ج) مکمل (۰/۲۵ نمره) د) طولیا یا ایزومتري (۰/۲۵ نمره)
۱۲	۱.۵	بازتاب نقاط A و B را نسبت به خط d به ترتیب A' و B' می‌نامیم. با توجه به موازی بودن AA' و BB' و عمودمنصف بودن d برای این دو پاره‌خط، امتداد AB و $A'B'$ همدیگر را در M قطع می‌کنند؛ بنابراین داریم:  $\left. \begin{array}{l} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \\ MB = MB', MA = MA' \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$ و چون طول پاره‌خط حفظ می‌شود، پس ایزومتري است. (صفحه ۳۷ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: رسم شکل (۰/۵ نمره) M روی عمودمنصف AA' و BB' است؛ پس:  $MA = MA', MB = MB'$ (۰/۵ نمره) $AB = MB - MA, A'B' = MB' - MA' \Rightarrow AB = A'B'$ (۰/۵ نمره)
۱۳	۱	
		الف) انتقال
		ب) $ K > 1$
۱۴	۱.۲۵	راه حل اول: مطابق شکل و طبق ویژگی بازتاب $AH = A'H = ۸$ در مثلث قائم‌الزاویه $OA'H$ داریم:  $A'H^2 = ۸^2 + OH^2 \rightarrow OH = ۶$ $\left\{ \begin{array}{l} S_{\triangle OA'A} = \frac{AA' \times OH}{2} \\ S_{\triangle OA'A} = \frac{OA' \times AH}{2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{16 \times 6}{2} = \frac{10 \times AH'}{2} \rightarrow AH' = \frac{48}{5} = ۹,۶$ راه حل دوم: مطابق شکل و طبق ویژگی بازتاب $AH = A'H = ۸$ و می‌دانیم محور بازتاب عمودمنصف AA' است:

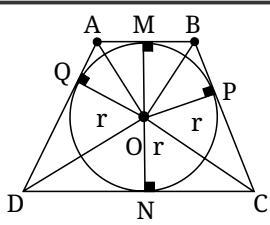
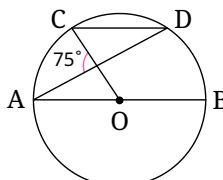
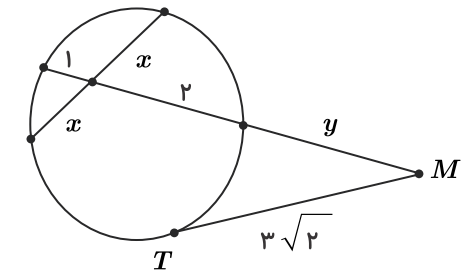
ردیف	نمره	
	۱.۲۵	پس $OA = OA' = ۱۰$ و طبق قضیه فیثاغورس داریم: $OH = ۶$ حال دو مثلث $AH'A'$ و OHA' متشابهند زیرا $\widehat{A'} = \widehat{A}$ و $\widehat{H} = \widehat{H'} = ۹۰^\circ$ پس: $\frac{AA'}{OA'} = \frac{AH'}{OH} \rightarrow \frac{۱۶}{۱۰} = \frac{AH'}{۶} \rightarrow AH' = ۹,۶$
۱۵	۱	
		الف) انتقال
		ب) ۳۶۰°
۱۶		از هریک از نقاط D, A, B, C دو مماس بر دایره رسم شده پس طول آن‌ها برابر است. بنابراین: $BQ = BP = ۵$, $CQ = CR = ۴$, $DS = RD = ۶$, $AS = AP = ۷$ بنابراین محیط چهارضلعی از رابطه زیر به دست می‌آید: $AB + BC + CD + AD = ۱۲ + ۹ + ۱۰ + ۱۳ = ۴۴$
۱۷		اگر مراکز سه دایره را A و B و C فرض کنیم، مساحت ناحیه هاشورخورده برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ منهای مساحت سه قطاع ۶۰° از دایره به شعاع ۱ (که روی هم یک نیم دایره به شعاع ۱ می‌سازند):  $S_{\text{هاشور}} = \frac{۲^۲ \times \sqrt{۳}}{۴} - \frac{۱}{۳} \pi \times ۱^۲ = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$
۱۸		با توجه به اینکه $OO' = R$ می‌باشد و $OA = O'A = R$، مثلث‌های $OO'A$ و $OO'B$ متساوی‌الاضلاع هستند. در نتیجه: $S_{\text{لوزی}} = ۲S_1 = \frac{۲\sqrt{۳}R^۲}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R^۲$ 
۱۹		چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. داریم: $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = ۱۸۰^\circ \quad , \quad \widehat{BAD'} + \widehat{BAD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BAD'} \quad (۱)$ به همین شکل $ABC'D'$ محاطی است. داریم: $\widehat{BAD'} + \widehat{BC'D'} = ۱۸۰^\circ , \widehat{BAD'} + \widehat{BAD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{BC'D'} = \widehat{BAD} \quad (۲)$ دو زنقه $\widehat{BAD} + \widehat{BAD'} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{BC'D'} + \widehat{BCD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow CD \parallel C'D' \Rightarrow CDC'D'$
۲۰		مماس مشترک خارجی: $TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۴^۲ - ۲^۲} = \sqrt{۱۲ \times ۱۶} = ۸\sqrt{۳}$ محیط $= ۸\sqrt{۳} + ۶ + ۸ + (۶ + ۸) = ۲۸ + ۸\sqrt{۳}$ مساحت $= \frac{۱}{۶}(OT + O'T') \times TT' = \frac{۱}{۶}(۸ + ۶) \times ۸\sqrt{۳} = ۵۶\sqrt{۳}$

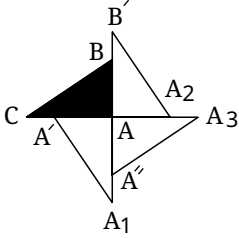
ردیف	نمره	
۲۱		عمود منصف BC از O مرکز دایره محیطی می‌گذرد. داریم:  $\widehat{BOH} = \widehat{COH} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2}$ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2} \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{4} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2}$ بنابراین محل برخورد نیمساز زاویه A وسط کمان BC می‌باشد که همان محل برخورد عمود منصف BC با محیط دایره است.
۲۲	۱.۵	طبق فرض می‌دانیم نقاط A, B, C, D روی دایره هستند.  $\begin{cases} \widehat{A} = \frac{DCB}{2} \\ \widehat{C} = \frac{DAB}{2} \end{cases} \rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \frac{DCB + DAB}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ به‌طور مشابه $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$
۲۳	۱	الف) درست؛ چون $d = 10 > R + R' = 8$ است. پس دو دایره متخارج هستند.  ب) درست؛ چون شعاع در نقطه تماس T بر خط مماس عمود است. پس دایره‌ای به قطر OM از T عبور می‌کند.  ج) نادرست؛ ممکن است $R < R'$ باشد و در این حالت $d < 0$ خواهد شد. نکته: اگر $d = R - R'$ می‌توان نتیجه گرفت که دو دایره مماس درون هستند. د) درست؛ اگر نقطه تقاطع را M و نقاط تماس T و T' و K' باشند، O و O' روی نیمساز $\widehat{M}$ قرار می‌گیرند، زیرا:

ردیف	نمره	
	۱	 $OT = OK \rightarrow O$ روی نیمساز $\widehat{MK}$ است. $OT' = OK' \rightarrow O'$ روی نیمساز $\widehat{MK'}$ است. $\left. \begin{matrix} OT = OK \\ OT' = OK' \end{matrix} \right\} \rightarrow O, O', M$ هم خط اند. (صفحه ۱۸ تا ۲۳ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) درست (۲۵/۰ نمره) ب) درست (۲۵/۰ نمره) ج) نادرست (۲۵/۰ نمره) د) درست (۲۵/۰ نمره)
	۱.۵	می دانیم طول مماس MT واسطه هندسی بین MA و MB است بنابراین:  $MT^2 = MA \times MB \Rightarrow$ $(8\sqrt{2})^2 = x(x + 28) \Rightarrow$ $x^2 + 28x - 128 = 0 \Rightarrow$ $(x + 32)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق ق} \\ x = -32 \text{ غ ق} \end{cases}$ $\Rightarrow MA = x = 4, MB = x + 28 = 32$ (صفحه ۱۹ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:  $(8\sqrt{2})^2 = x(x + 28)$ (نمره ۵) $x^2 + 28x - 128 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق ق} \\ x = -32 \text{ غ ق} \end{cases}$ (نمره ۵) $MA = 4, MB = 32$ (نمره ۵)
	۱	
		الف) درست
		ب) نادرست
		پ) نادرست
		ت) درست

ردیف	نمره	
۱		با توجه به شکل نشان دهید: الف) اگر $AD = BC$، آنگاه $AC = BD$. ب) اگر $AC = BD$، آنگاه $AD = BC$. 
۲		در چهارضلعی $ABCD$، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است. 
۳		مثلث ABC در یک دایره محاط است و اندازه کمان‌های AB و BC و AC به ترتیب $75^\circ + x$ و $2x + 7^\circ$ و $3x - 22^\circ$ است. اندازه زاویه‌های داخلی مثلث بر حسب درجه چقدر است؟
۴		در شکل زیر، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند و M نقطه‌ای بر امتداد پاره خط AB است. اگر دو قاطع MH و MG را رسم کنیم، چهارضلعی $EFGH$ همواره: 
۵		در شکل مقابل MB و MC مماس بر دایره، $AB = AC$ و $\widehat{AC} = 140^\circ$ است. زاویه OMC چقدر است؟ 

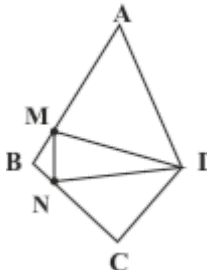
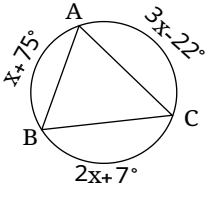
ردیف	نمره	
۶		در شکل مقابل AB قطر دایره است. اندازه زاویه MAN چند درجه است؟ 
۷		در شکل مقابل AD بر دایره مماس بوده و $AB = AD = 6$ است. اگر محیط مثلث ABC برابر با ۱۶ باشد، اندازه BC چقدر است؟ 
۸		در شکل زیر داریم: $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$. اندازه زاویه $\hat{M}$ چقدر است؟ 
۹		از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک دوزنقه چه نوع چهارضلعی ایجاد می‌شود؟
۱۰		یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه $AB = 2r \tan \frac{180}{n}$ و $CD = 2r \sin \frac{180}{n}$. 
۱۱		در دایره $C(O, R)$، دو وتر موازی $AB = 4$ و $CD = 8$ به فاصله ۶ واحد از یکدیگر رسم شده‌اند. شعاع دایره را به دست آورید.
۱۲		مطابق شکل، دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ بر دایره به شعاع r محیط شده است.

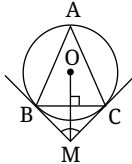
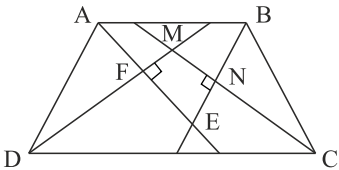
ردیف	نمره	
		
		الف با توجه به این که نقطه O مرکز دایره محاطی دوزنقه و محل همرسی نیمسازهای زوایای داخلی آن است، ثابت کنید مثلث‌های AOM و BOM هم‌نهشت هستند و نتیجه بگیرید که $AM = BM = \frac{AB}{2}$. به همین ترتیب ثابت کنید مثلث‌های CON و DON هم‌نهشت هستند و نتیجه بگیرید $DN = CN = \frac{DC}{2}$.
		ب با توجه به قسمت (الف) و این نکته که مماس‌های رسم شده بر دایره از نقطه‌ای خارج آن، باهم برابرند، ثابت کنید: $AD = BC = \frac{AB + CD}{2}$
۱۳		در دایره شکل مقابل O مرکز و $CD \parallel AB$، اندازه کمان CD را به دست آورید. 
۱۴	۱.۲۵	در شکل زیر MT به طول $3\sqrt{2}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به دست آورید. 
۱۵	۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره $C(O, r)$ باشد فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است. ب) شرط لازم و کافی برای اینکه یک خط بر یک دایره مماس باشد این است که این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع وارد بر آن نقطه عمود باشد. ج) کمان‌های دایره‌های مختلف که اندازه‌های برابر دارند همواره طول‌های برابر دارند. د) اگر کمان‌های محدود به دو وتر یک دایره با هم برابر باشند آن دو وتر موازی‌اند.

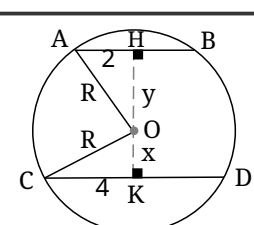
ردیف	نمره	
۱۶	۱	جاهای خالی زیر را با عبارت (کلمات) مناسب کامل کنید. الف: هرگاه از یک نقطه خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم طول مماس بین دو قطعه قاطع است. ب: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $OO' = d = R + R'$ نسبت به هم وضعیت دارند. ج: طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های R و R' در حالت مماس خارج با فرمول محاسبه می‌شود. د: در حالتی که دو دایره متقاطع باشند خط‌المرکزین OO' وتر مشترک دو دایره است.
۱۷	۱	در هر قسمت، پاسخ مناسب را بنویسید.
		الف در هر مثلث، نقطه هم‌رسی نیمسازها، مرکز دایره مثلث است. (محیطی، محاطی)
۱۸		خط d را نسبت به خط Δ بازتاب می‌کنیم تا خط d' به دست آید. خط d' را تحت یک انتقال به خط d'' تبدیل می‌کنیم. اگر زاویه بین d و Δ را α بنامیم. زاویه بین d و d'' کدام است؟
۱۹		در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.
۲۰		دایره $C(O, R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید. الف) $k = ۲$ ب) $k = -۲$ پ) $k = \frac{1}{۲}$
۲۱		در شکل مقابل، چند دوران از شکل سایه‌دار وجود دارد؟ 
۲۲		نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟
۲۳	۱	جاهای خالی را با کلمات (عبارات) مناسب کامل کنید. الف) اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس یک چندضلعی عبور کند، دایره را می‌نامیم. ب) وضعیت نسبی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در حالتی که $R - R' < OO'$ به صورت است. ج) یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن باشند. د) تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات نامیده می‌شوند.
۲۴	۱.۲۵	ثابت کنید تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. (حالتی را در نظر بگیرید که مرکز تجانس روی پاره‌خط قرار ندارد و $k > ۱$)

ردیف	نمره
۲۵	۱.۲۵

محل برخورد قطرهای مستطیلی را O می‌نامیم. در تجانسی به مرکز O و نسبت $\frac{2}{3}$ ، مساحت بین آن مستطیل و تصویرش برابر ۱۰ است. مساحت مستطیل اولیه را محاسبه کنید.

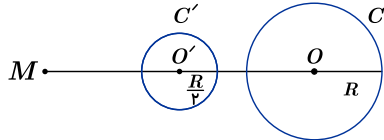
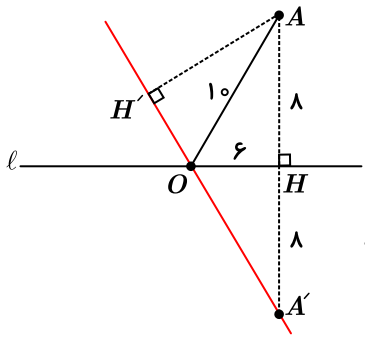
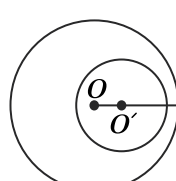
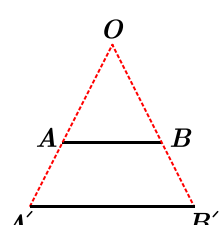
ردیف	نمره	
۱		می‌دانیم اگر دو وتر مساوی از دایره‌ای داشته باشیم کمان‌های نظیر آنها نیز مساوی‌اند و برعکس. (الف) $AD = BC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AB}$ $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{CBA} \Rightarrow BD = AC$ (ب) $AC = BD \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{ABC} - \widehat{AB} = \widehat{DAB} - \widehat{AB}$ $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow BC = AD$
۲		اگر روی ضلع AB نقطه M را طوری انتخاب کنیم که $AM = AD$ و اگر روی ضلع BC نقطه N را طوری انتخاب کنیم که $DC = CN$ باشد در این صورت مثلث‌های ADM, DCN متساوی‌الساقین هستند. ضمناً با توجه به فرض مسأله داریم: $AB + CD = AD + BC \Rightarrow AM + MB + CD = AD + BN + CN$  چون $AM = AD$, $DC = CN$ می‌باشد پس $MB = BN$ می‌باشد. بنابراین مثلث BMN نیز متساوی‌الساقین است. اگر عمودمنصف‌های مثلث DMN را رسم کنیم همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند از طرفی عمودمنصف‌های اضلاع DM, MN, DN نقش نیمسازهای زوایای $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ را نیز دارند پس طبق ویژگی مکان هندسی نیمساز، فاصله نقطه I از همه اضلاع AD, AB, BC, DC مساوی است. بنابراین نقطه I مرکز دایره محاطی این چهارضلعی است پس این چهارضلعی محیطی است.
۳		یعنی باید داشته باشیم: $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ$  $\Rightarrow (x + 75^\circ) + (2x + 7^\circ) + (3x - 22^\circ) = 360^\circ \Rightarrow 6x + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$ در نتیجه زوایای داخلی مثلث که زاویه‌های محاطی محسوب می‌شوند برابر با نصف کمان مقابل خودشان هستند، پس: $\hat{A} = \frac{1}{2}(2x + 7^\circ) = 53,5^\circ$ $\hat{B} = \frac{1}{2}(3x - 22^\circ) = 64^\circ, \hat{C} = \frac{1}{2}(x + 75^\circ) = 62,5^\circ$
۴		طبق قضیه عکس روابط طولی، از چهار نقطه E, F, G, H یک دایره می‌گذرد، پس $EFGH$ محاطی است. $\left\{ \begin{array}{l} MA \times MB = ME \times MH \\ MA \times MB = MF \times MG \end{array} \right. \Rightarrow ME \times MH = MF \times MG$

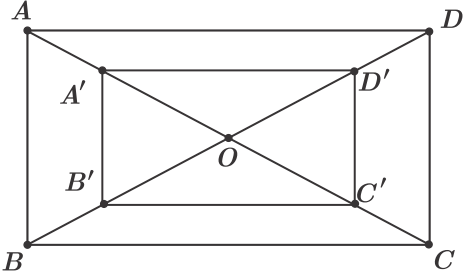
ردیف	نمره
۵	در مثلث ABC داریم: $AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 360^\circ - 2 \times 140^\circ = 80^\circ$  $\widehat{BMC} = \frac{\widehat{BAC} - \widehat{BC}}{2} = \frac{2 \times 140^\circ - 80^\circ}{2} = 100^\circ$ چون O از B و C به یک فاصله است، پس OM نیمساز $\widehat{BMC}$ است: $\widehat{OMC} = \frac{\widehat{BMC}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$
۶	با توجه به شکل داریم: $5y + 3x + 3y + 5x = 360^\circ \Rightarrow 8(x + y) = 360^\circ \Rightarrow x + y = 45^\circ$ $(\text{محاطی}) \widehat{MAN} = \frac{3x + 3y}{2} = \frac{3}{2}(x + y) = 67,5^\circ$
۷	$AB = AD \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}, \quad (\text{محاطی}) \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \quad (\text{ظلی}) \widehat{A} = \frac{\widehat{AC}}{2}$ $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow AC = CD$ $\Delta \widehat{ABC} \text{ محیط} = 16 = AB + AC + BC = 6 + AC + BC \Rightarrow AC + BC = 10$ $CD = AC \Rightarrow BD = BC + CD = BC + AC = 10 \Rightarrow BD = 10$ $AD^2 = CD \times BD \Rightarrow 36 = CD \times 10 \Rightarrow CD = 3,6$ $\Rightarrow BC = BD - CD = 10 - 3,6 = 6,4$
۸	$a + b + c = 360^\circ, \quad b = 2a, c = 3a \Rightarrow a + 2a + 3a = 360^\circ$ $\Rightarrow a = 60^\circ, \quad b = 120^\circ, \quad c = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M} = \frac{c - b}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$
۹	از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی دوزنقه $ABCD$ چهارضلعی $MNEF$ ایجاد می شود به طوری که $\widehat{N} = \widehat{F} = 90^\circ$ پس $MNEF$ محاطی است زیرا زوایای مقابل آن مکمل اند. 
۱۰	$\widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \Delta \widehat{DOH} : \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{DH}{OD} = \frac{DH}{r} = \frac{\frac{CD}{2}}{r} = \frac{CD}{2r} \Rightarrow CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$ $\widehat{M} = 90^\circ \Rightarrow \Delta \widehat{MOB} : \tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{BM}{OM} = \frac{\frac{AB}{2}}{r} = \frac{AB}{2r} \Rightarrow AB = 2r \times \tan \frac{180^\circ}{n}$
۱۱	مطابق شکل، نقطه O مرکز دایره است. می دانیم که عمود رسم شده از مرکز دایره بر وتر، آن را نصف می کند، داریم:

ردیف	نمره
	$\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ, AH = BH = \frac{r}{2} = 2 \\ \triangle AOH : y^2 = R^2 - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} \hat{K} = 90^\circ, CK = DK = \frac{r}{2} = 4 \\ \triangle COK : x^2 = R^2 - 16 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = R^2 - 4 \\ x^2 = R^2 - 16 \end{cases} \Rightarrow y^2 - x^2 = 12 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 12$ از طرفی فاصله دو وتر از یکدیگر ۶ واحد است، پس: $x + y = 6 \Rightarrow (y-x) \times 6 = 12 \Rightarrow y-x = 2$ با حل دستگاه زیر مقادیر x و y و در نهایت R به دست می‌آید: $\begin{cases} x+y=6 \\ y-x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \xrightarrow{y^2=R^2-4} y^2=R^2-4 \Rightarrow 16=R^2-4 \Rightarrow R^2=20 \Rightarrow R=2\sqrt{5}$ توجه: دو وتر AB و CD نمی‌توانند در یک طرف O قرار گیرند. (چرا؟) 
۱۲	الف) نقطه O مرکز دایره محاطی است، بنابراین محل هم‌رسمی نیمسازهاست، پس می‌توان نتیجه گرفت که OA, OB, OC و OD نیمساز زوایای A, B, C, D هستند. داریم: $\begin{cases} ABCD \text{ دوزنقۀ متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \\ \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AOM = \triangle BOM \quad (۲) \\ OM \text{ مشترک} \quad (۳) \end{cases}$ $(۱), (۲), (۳) : \triangle AOM \cong \triangle BOM \Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{2}$ به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد مثلث‌های CON و DON هم‌نهشت هستند و داریم: $DN = CN = \frac{DC}{2}$
	ب) مماس‌های رسم‌شده از رأس‌های A و B بر دایره محاطی به ترتیب زیر برابرند: $\begin{cases} AD = AQ + QD = AM + DN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB+CD}{2} \quad (۱) \\ BC = BP + PC = BM + CN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB+CD}{2} \quad (۲) \end{cases}$ $(۱), (۲) : AD = BC = \frac{AB+CD}{2}$
۱۳	زاویه محاطی $\hat{A}$ را برابر α در نظر می‌گیریم، پس کمان روبه‌روی آن برابر $\widehat{BD} = 2\alpha$ می‌شود. $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$ اندازه زاویه مرکزی $\angle AOC$ برابر کمان روبه‌رویش یعنی $\widehat{AC} = 2\alpha$ می‌شود.

ردیف	نمره	
		$\widehat{AOM} : 75^\circ = \alpha + 2\alpha = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$
۱۴	۱.۲۵	$x \times x = 2 \times 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$ $(3\sqrt{2})^2 = y(y + 3) \rightarrow y^2 + 3y - 18 = 0 \rightarrow y = 3$
۱۵	۱	الف) نادرست؛ اگر نقطه درون دایره باشد فاصله آن تا مرکز کمتر از شعاع آن دایره است. ب) درست؛ یک خط و یک دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع وارد بر آن نقطه عمود باشد. ج) نادرست؛ با توجه به شکل مقابل مشاهده می شود که کمان ها با اندازه های برابر می توانند طول های نابرابر داشته باشند: د) نادرست؛ مثال نقض در شکل زیر $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ اما $AB \nparallel A'B$ (صفحه ۱۰ تا ۱۵ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) نادرست (۲۵، نمره) ب) درست (۲۵، نمره) ج) نادرست (۲۵، نمره) د) نادرست (۲۵، نمره)
۱۶	۱	الف) بنابر قضیه ای «هرگاه از یک نقطه خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع خواهد شد.» (صفحه ۱۹ کتاب درسی) ب) در اوضاع نسبی دو دایره نسبت به هم در حالتی که $d = R + R'$ باشد دو دایره مماس برون هستند. (صفحه ۲۰ کتاب درسی) ج) $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad d = R + R' \quad \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'}$ $\Rightarrow TT' = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$

ردیف	نمره	
	۱	(صفحه ۲۲ کتاب درسی) (د) چون O و O' از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند. بنابراین OO' عمود منصف AB خواهد شد. راهنمای تصحیح: (۱) واسطه هندسی (۲۵، نمره) (۲) مماس بیرون (مماس خارج) (۲۵، نمره) (۳) $\displaystyle T' = 2\sqrt{RR'}$ (۲۵، نمره) (۴) عمود منصف (۲۵، نمره)
۱۷	۱	
		الف) محاطی
۱۸		مطابق شکل d' بازتاب d به محوریت Δ است. زاویه بین d و Δ طبق فرض α است. پس زاویه بین d' و Δ هم α است. تحت بردار $\vec{V}$، d' را انتقال می دهیم تا d'' به دست آید. می دانیم که $d'' \parallel d'$ است. پس زاویه بین d'' با d برابر است با زاویه بین d' و d که این زاویه برابر 2α است.
۱۹		$AB \perp d, \hat{H} = 90^\circ$ $AH = A'H, BH = B'H$ $\begin{cases} AB = BH - AH \\ A'B' = B'H - A'H \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$
۲۰		الف) $k = 2 \Rightarrow MO' = 2OM, R' = 2R$ ب) $k = -2 \Rightarrow MO' = 2OM, R' = 2R$

ردیف	نمره	
		این قسمت مانند (الف) می باشد فقط مرکز متجانس M و C تصویر C' می باشد. 
۲۱		دوران ها عبارتند از: ۱- مثلث $AB'A_p$ دوران یافته ABC به مرکز A و زاویه 90° - (ساعتگرد). ۲- مثلث $AA''A_p$ دوران یافته ABC به مرکز A و زاویه 180°. ۳- مثلث $AA'A_1$ دوران یافته ABC به مرکز A و زاویه 90° (پادساعتگرد) یا 270° - (ساعتگرد).
۲۲		از اینکه A' تصویر A در بازتاب نسبت به خط l است و $AA' = 16$ نتیجه می شود $AH = A'H = 8$ را به کمک قضیه فیثاغورس به دست می آوریم:  $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow OH = 6$ بنابراین مساحت مثلث OAA' برابر است با: $S_{\triangle OAA'} = \frac{1}{2} AA' \times OH = \frac{1}{2} \times 16 \times 6 = 48$ از طرفی مساحت مثلث OAA' را می توان با توجه به اینکه $OA' = OA = 10$ داریم که $OA = OA' = 10$ محاسبه کرد. قاعده آن و AH' ارتفاع نظیر این قاعده است، محاسبه $S_{\triangle OAA'} = \frac{1}{2} OA' \times AH' = \frac{1}{2} \times 10 \times AH' = 48$ $5AH' = 48 \Rightarrow AH' = \frac{48}{5} = 9,6$
۲۳	۱	(الف) اگر دایره ای باشد که از همه رئوس یک چندضلعی عبور کند، دایره را محیطی و چندضلعی را محاطی می نامند. (صفحه ۲۴ کتاب درسی) (ب) وضعیت نسبی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در حالتی که $d = OO' < R - R'$ باشد، به صورت متداخل است. (صفحه ۲۰ کتاب درسی)  (ج) قضیه: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. (صفحه ۲۷ کتاب درسی) (د) تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند، تبدیلات طولیا (ایزومتري) نامیده می شوند. (صفحه ۳۴ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) دایره محیطی (۲۵، نمره) (ب) متداخل (۲۵، نمره) (ج) مکمل (۲۵، نمره) (د) طولیا یا ایزومتري (۲۵، نمره)
۲۴	۱،۲۵	مرکز تجانس روی پاره خط AB نیست. در این حالت مطابق شکل A' و B' مجانس های A و B هستند: $\begin{cases} OA' = k \cdot OA \\ OB' = k \cdot OB \end{cases} \rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$ بنا به عکس قضیه تالس $AB \parallel A'B' \rightarrow m_{AB} = m_{A'B'}$ 

ردیف	نمره	
		روش اول: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد. داریم:  $S - S' = 10 \Rightarrow S - \frac{4}{9}S = 10 \Rightarrow S = 18$ روش دوم: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد. داریم: $S - S' = 10 \Rightarrow AB \times AD - A'B' \times A'D' = AB \times AD - \frac{2}{3}AB \times \frac{2}{3}AD = 10 \Rightarrow S = AB \times AD = 18$ روش سوم: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد. داریم. $\frac{S'}{S} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S - S'}{S} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{10}{S} = \frac{5}{9} \Rightarrow S = 18$ روش چهارم: فرض کنیم S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشند و α یکی از زاویه‌های بین دو قطر مستطیل باشد. می‌دانیم در هر مثلث میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. بنابراین: $S - S' = 10 \Rightarrow 4S_{OAB} - 4S_{OA'B'} = 10$ $\Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}OA \times OB \times \sin \alpha\right) - 4\left(\frac{1}{2}OA' \times OB' \times \sin \alpha\right) = 10$ $\Rightarrow OA \times OB \times \sin \alpha - \frac{4}{9}OA \times OB \times \sin \alpha = 5 \Rightarrow OA \times OB \times \sin \alpha = 9$ $\Rightarrow S = 4\left(\frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \alpha\right) = 18$
۲۵	۱۲.۵	