



انتقال زوایا

زاویه قرینه: کسینوس: منفی خوار بقیه: سراج دار	جنس عوض همیشه تعیین علامت تابع اولیه	مضارب زوج: π جنس عوض همیشه تعیین علامت تابع اولیه
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$ $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$ $\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = +\cot x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$

مضارب زوج: π : $\pi, 2\pi, \dots$

۱- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$\cot 135^\circ + \sin 15^\circ$
 $90 + 45$

$(-\cot 45) + (\sin 45) = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2} \sin(-\frac{3\pi}{4}) + \cot(\frac{7\pi}{4}) - 2 \cos(\frac{4\pi}{3})$

$-\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} (\sin \frac{\pi}{4}) = -1$

$\cot(\frac{7\pi}{4}) = \cot(\pi + \frac{3\pi}{4}) = \cot \frac{3\pi}{4} = -1 \Rightarrow 1 + 1 - 1 = 1$

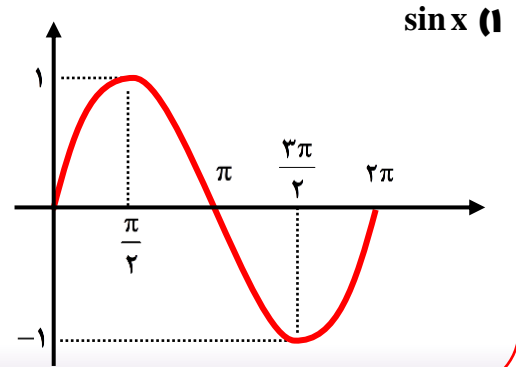
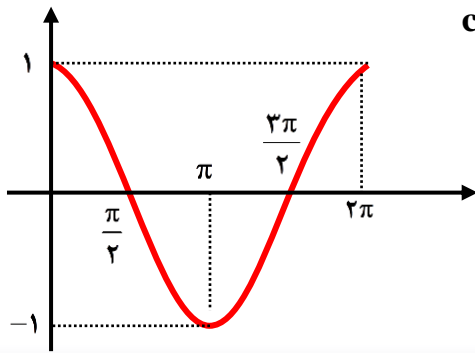
$-2 \cos(\frac{4\pi}{3}) = -2 \cos(\pi + \frac{2\pi}{3}) = 2 \cos(\frac{2\pi}{3}) = 1$

۲- اگر $\tan \theta = 2$ باشد، مقدار عددی عبارت $\frac{2 \cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{3 \sin(\frac{5\pi}{2} + \theta) + \cos(\frac{9\pi}{2} - \theta)}$ را به دست آورید.

$$\frac{-2 \sin \theta + \cos \theta}{-3 \sin \theta - \cos \theta} \div \cos \theta = \frac{-2 \tan \theta + 1}{-3 \tan \theta - 1}$$

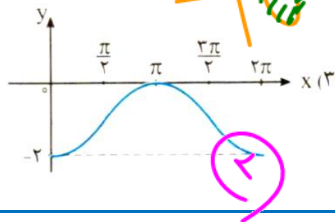
$$= \frac{-2 \cdot 2 + 1}{-3 \cdot 2 - 1} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

نمودار توابع مثلثاتی

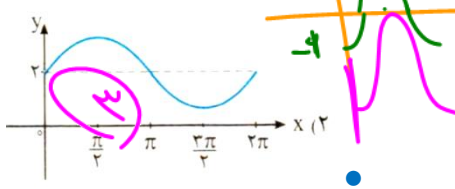


۳- با توجه به نمودارهای داده شده، مشخص کنید هر یک از نمودارها دارای کدامیک از ضابطه‌های داده شده هستند؟

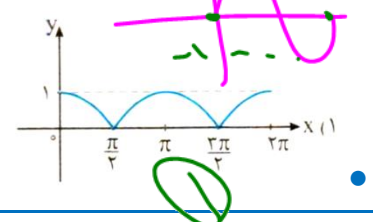
$y = |\cos x|$



$y = -\cos x - 1$



$y = \sin x + 2$

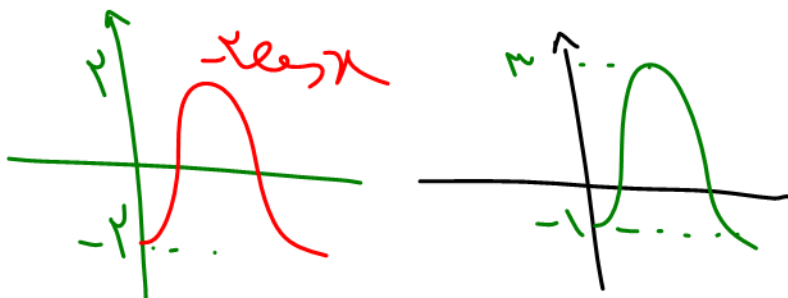


۴- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید؟

$y = 2 \sin(2x) + 1$



$y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$



۵- بیشترین و کمترین مقدار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$y = 4 \cos(x + \frac{\pi}{6}) - 1$

$y = |\cos x| + 2$

Handwritten solutions for question 5:

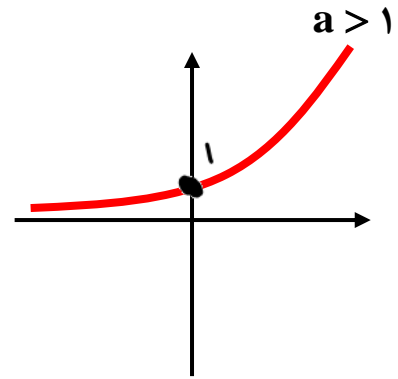
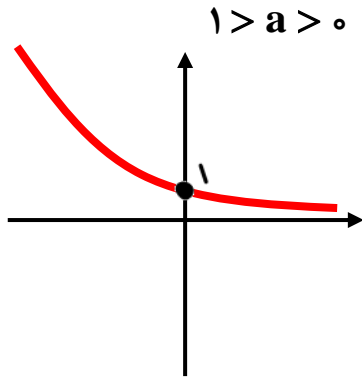
For $y = 4 \cos(x + \frac{\pi}{6}) - 1$, the range is $[-5, 3]$.

For $y = |\cos x| + 2$, the range is $[2, 3]$.

تابع نمایی

تابع نمایی به فرم زیر تعریف میشود:

$$f(x) = a^x : a > 0, a \neq 1$$



$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$$

معادله نمایی:

اگر کسری بود: توان منفی

اگر رادیکالی بود: توان کسری

۶- هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\bullet (\sqrt{5}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = (\sqrt{5})^4 = 25 \quad \bullet 2^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{12}} = 2^{2\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3}}$$

$$\bullet 9^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{32}} = 3^{2\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = 3^{4\sqrt{2}}$$

$$\bullet (\sqrt{2}^{\sqrt{3}})^{\sqrt{5}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{15}} = 2^{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

۷- حدود a را چنان تعیین کنید که تابع f با ضابطه $f(x) = (2a+3)^x$ یک تابع نمایی باشد.

$$2a+3 > 0 \rightarrow a > -\frac{3}{2}$$

$$2a+3 \neq 1 \rightarrow a \neq -1$$

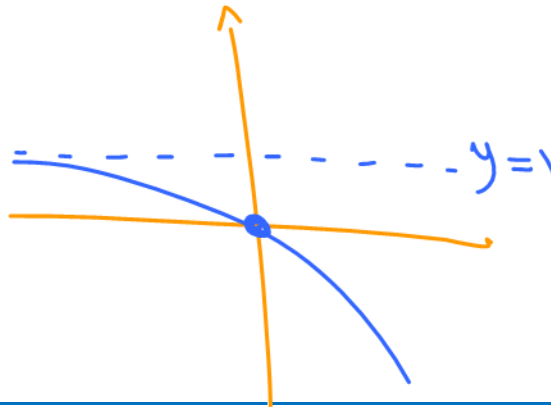
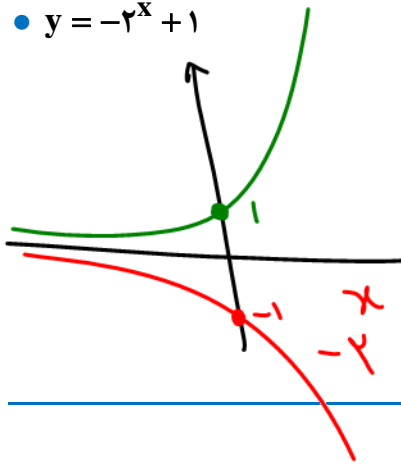
$$2a+3 > 1 \rightarrow a > -1$$

*تابع نمایی صعودی؟



۸- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

• $y = -2^x + 1$



۹- هریک از معادلات نمایی زیر را حل کنید.

• $4^{x^2} - 2^x = 16 - 2^x$

$x^2 - 2x = -2x$
 $x^2 = 0$

$x^2 - 2x = -2x$
 $x^2 + 2x = 0$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$
 $x = 0$
 $x = -2$

• $3^{x+2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} = \sqrt{27} \cdot 2^x$

$3^{x+2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} = \sqrt{27} \cdot 2^x$
 $3^{x+2} \times 3^{-2(x-1)} = 3^{1/2} \cdot 2^x$
 $3^{x+2-2x+2} = 3^{1/2} \cdot 2^x$
 $3^{4-x} = 3^{1/2} \cdot 2^x$
 $3^{4-x-1/2} = 2^x$
 $3^{7/2-x} = 2^x$

$3^{7/2-x} = 2^x$
 $3^{7/2} \cdot 3^{-x} = 2^x$
 $3^{7/2} \cdot \frac{1}{3^x} = 2^x$
 $3^{7/2} = 2^x \cdot 3^x$
 $3^{7/2} = (2 \cdot 3)^x$
 $3^{7/2} = 6^x$

$3^{7/2} = 6^x$
 $3^{7/2} = 6^1$
 $x = 1$

• $t^2 - 3 \times t^x + 2 = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$
 $t^2 - 3t + 2 = 0$
 $(t-1)(t-2) = 0$
 $t = 1$ → $2 = 1$ → $x = 0$
 $t = 2$ → $2 = 2$ → $x = 1$

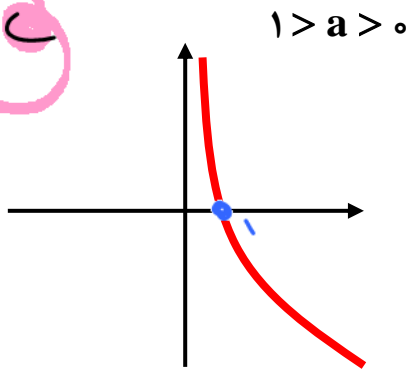


لگاریتم

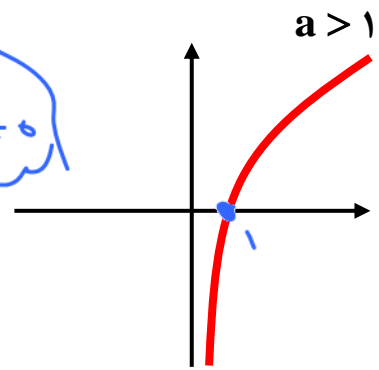
لگاریتم، معکوس تابع نمایی است:

$$y = a^x \rightarrow x = a^y \rightarrow y = \log_a x : x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a a^b = b$$



$$\log_a a = 1$$



$$1) \log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = \frac{3}{1} \log_2 2 = \frac{3}{1} \cdot 1 = 3$$

$$2) \log_a \times b = \log_a + \log_b$$

$$3) \log_a \div b = \log_a - \log_b$$

$$4) \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \rightarrow \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$5) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

۱۰- با استفاده از نماد لگاریتم، تساوی‌های داده شده زیر را به صورت یک تساوی لگاریتمی بنویسید.

$$\bullet 2^3 = 8$$

$$3 = \log_2 8$$

$$\bullet 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$-2 = \log_3 \frac{1}{9}$$

$$\bullet 4^{\frac{5}{2}} = 32$$

$$\frac{5}{2} = \log_4 32$$

۱۱- تساوی‌های زیر را به یک تساوی نمایی تبدیل کنید.

$$\bullet \log_{0.1} 0.1 = -2$$

$$\log_{0.1} 0.1 = -2$$

$$\bullet \log_{\frac{1}{8}} 16 = \frac{4}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{8}} 16 = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49} = -4$$

$$\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49} = -4$$



۱۲- حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$\bullet \log_{16} 32 = \log_{2^4} 2^5 = \frac{5}{4}$
 $\bullet \log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{81} = \log_{3^{-3}} 3^{-4} = \frac{4}{3}$
 $\bullet \log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt{2} = \log_{3^{\frac{1}{4}}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$

$\bullet \log_5 125 + \log \sqrt{1000}$
 $3 + \frac{1}{2} \log 1000 = 3 + \frac{1}{2} \log 10^3 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$
 $\bullet \log_3 3 = 1$

$\log^2 2 - \log^2 2 = \log^2 2 = \log^2 2$
 $\log^2 4 + \log^2 4 = \log^2 4 = 2$

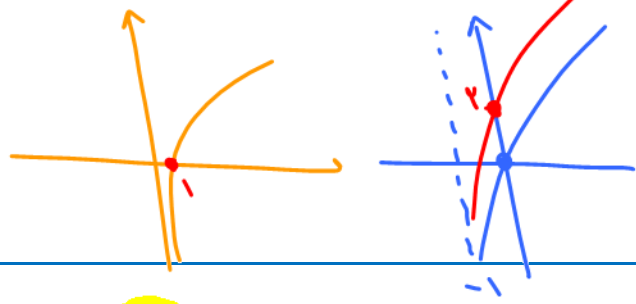
۱۳- با فرض $\log 2 = 0/3$ ، $\log 3 = 0/5$ و $\log 7 = 0/8$ ، مقدار عددی عبارتهای زیر را به دست آورید.

$\bullet \log_{28} \sqrt[4]{28} = \log_{2^2 \cdot 7} 2^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_{2^2 \cdot 7} 2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \log_{2^2 \cdot 7} 2^2 \right) = \frac{1}{8} \log_{2^2 \cdot 7} 4 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \log_{2^2 \cdot 7} 2^4 \right) = \frac{1}{16} \log_{2^2 \cdot 7} 16 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \log_{2^2 \cdot 7} 2^8 \right) = \frac{1}{32} \log_{2^2 \cdot 7} 2^8 = \frac{1}{32} \cdot \frac{8}{2} = \frac{1}{4}$
 $\bullet \log_{21} + \frac{1}{2} \log_{25} = \log_{3 \cdot 7} 3 + \log_{5^2} 5 = \log_3 3 + \log_5 5 = 1 + 1 = 2$
 $\bullet \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0/5}{0/3} = \frac{5}{3}$
 $\bullet \log_{42} 18 = \frac{\log 18}{\log 42} = \frac{\log 2 \cdot 3^2}{\log 2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{\log 2 + 2 \log 3}{\log 2 + \log 3 + \log 7} = \frac{0/3 + 2 \cdot 0/5}{0/3 + 0/5 + 0/8} = \frac{0/3 + 0/10}{0/3 + 0/5 + 0/8} = \frac{0/13}{0/16} = \frac{13}{16}$

$\log_2 2 + \log_2 4 = \log_2 8 = 3$
 $\log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$
 $\log_2 4 = 2$

۱۴- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y = 2 + \log_2(x+1)$



۱۵- هریک از معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$\bullet \log_2(\Delta x - 1) = 2 \rightarrow \Delta x - 1 = 4 \rightarrow \Delta x = 5 \rightarrow x = 2$

$\bullet \log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$

$\log_x(x^2 + 4) - \log_x 5 = 1 \rightarrow \log_x \frac{x^2 + 4}{5} = 1 \rightarrow \frac{x^2 + 4}{5} = x$
 $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$



• $\log(x-2) + \log(x-2) = \log 2$ $\log 2$

$D_f: x > 2$

$\log(x^2 - 4x + 4) = \log 2$

$x^2 - 4x + 4 = 2$
 $x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

۱۶- اگر بزرگی یک زمین لرزه برابر ۶/۲ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر است؟

داده: $M = 6.2$
 $\log E = 11.1 + 1.5M$

$\log E = 11.1 + 9.3 = \log E = 20.4 \Rightarrow E = 10^{20.4}$



حد و محاسبه آن

حد تابع $f(x)$ در نقطه a زمانی وجود دارد که:

(۱) حد راست موجود باشد

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l; \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

(۲) حد چپ موجود باشد

(۳) حد چپ و حد راست با هم برابر باشند

برای محاسبه حد توابع دارای اعمال جبری، میتوان از روابط زیر استفاده کرد:

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

در محاسبه حد کسرهای گویا (مورد چهارم) اگر صورت و مخرج یک کسر گویا همزمان صفر حدی شوند، در این حالت باید عامل صفرشونده (عامل تجزیه شده ای که محل حد گیری ریشه آن عامل است $(x-a)$) را از صورت و مخرج ساده کنیم

برای محاسبه حد در توابعی که پیوسته هستند میدانیم مقدار تابع در نقطه a با حد آن تابع در آن نقطه برابر است. پس ابتدا خود عدد a را در تابع قرار میدهیم مگر یکی از شرایط زیر وجود داشته باشد:

(۱) درون براکت عدد صحیح شود ← عدد

(۲) درون قدر مطلق صفر شود ← ضابطه

(۳) لب مرز دامنه تابع باشیم ← تعریف نرّه برد : حد ندارد

(۴) لب مرز تابع چند ضابطه بیوفتیم ← ضابطه

این توابع میتوانند پیوسته نباشند لذا اگر در تابع یکی از شرایط بالا رخ دهد باید از تعریف اصلی حد استفاده کنیم و با تفکر چپ و راستی به محاسبه حد آن تابع پردازیم

۱۷- با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f, g ، حدهای خواسته شده را (در صورت وجود) به دست آورید.

- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2f(x) + 2g(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$
- $$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$$
- $$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2g(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}$$

۱۸- در توابع زیر، حد تابع در نقطه داده شده را بررسی کنید.

• $f(x) = [x - 1], x = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x - 1] = [1^+] = 1$ حد ندارد.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x - 1] = [1^-] = 0$

• $f(x) = x[x - 1], x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x[x - 1] = x[-1^+] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x[x - 1] = x[-1^-] = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

• $f(x) = \begin{cases} x + 6 & ; x > 2 \\ x^2 + 1 & ; x = 2, x = 2 \\ x^2 & ; x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 6 = 8$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

۱۹- اگر $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & x > 1 \\ x + 1 & x = 1 \\ 2x + a & x < 1 \end{cases}$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + a = 2 + a$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$

$2 + a - 2 = 3 \Rightarrow a = 3$



۲۰- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x}{x^3 + 2x} = \frac{-4}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4+3x} = \sqrt{-2} \text{ وجود ندارد.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(2x+3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{2x + 3} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x^2 - 2x + 2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2} = \frac{12}{-4} = -3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+1})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - [x]}{|x^2 - 1|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - x[x]}{|x^2 - 1|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - x}{x^2 - x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - x - 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \frac{-1}{12}$$

پیوستگی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

یک تابع زمانی پیوسته است که:

(۱) تابع در آن نقطه حد داشته باشد (حد چپ و راستش برابر باشد)

(۲) تابع در آن نقطه تعریف شده باشد. پس در **بی‌خروج**... که تابع تعریف نشده است قطعاً پیوسته نیست

۲۱- تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2b & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ x + a & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. b, a را چنان بیابید که تابع در $x = 0$ پیوسته باشد.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + 2b = 2b$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + a = a$

$f(0) = 1$

$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$

$a = 1$

۲۲- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & x \neq 1 \\ -3 & x = 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2$

$f(1) = -3$

پیوسته نیست

۲۳- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x + m}$ روی \mathbb{R} پیوسته است. حدود m را مشخص کنید.

مخرج ریشه نداشته

$\Delta < 0 \rightarrow 14 - 4m < 0$

$14 < 4m$

$3 < m$

احتمال

پدیده تصادفی: پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان پیش بینی کرد مانند پرتاب سکه یا تاس

فضای نمونه ای: به کلیه حالات ممکن در یک پدیده تصادفی فضای نمونه ای گویند

$n(S)$ S
 $n(A) \cup n(B)$ B \ A

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می نامند

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

پیشامد مستقل: هرگاه رخ دادن یک پیشامد بر رخ دادن پیشامد دیگر تاثیر نگذارد آن دو پیشامد را مستقل می گوئیم:

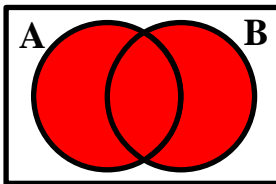
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

پیشامد ناسازگار: دو پیشامد که هیچگاه همزمان رخ نمی دهند: $P(A \cap B) = \emptyset$

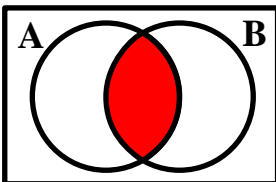
$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

احتمال شرطی: $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

اجتماع دو پیشامد: وقتی رخ میدهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد



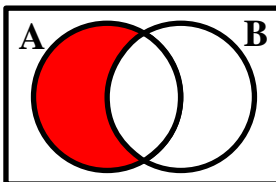
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$P(A \cap B)$

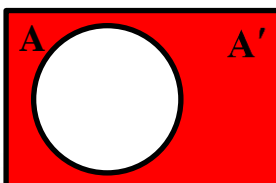
اشتراک دو پیشامد: وقتی رخ میدهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند

تفاضل دو پیشامد: وقتی رخ میدهد که یک پیشامد رخ بدهد ولی پیشامد دیگر رخ ندهد



$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

متمم یک پیشامد: متمم یک پیشامد زمانی رخ می دهد که خود پیشامد رخ ندهد



$$\begin{cases} n(A') = n(S) - n(A) \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$



۲۴- دو نفر به نام‌های A و B با یک فرد مبتلا به بیماری ویروسی ملاقات کرده‌اند. احتمال ابتلا به این بیماری برای این دو نفر به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ می‌باشد. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال‌های زیر:

$$P(A) = 0.7$$

$$P(B) = 0.8$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$$

• هر دو نفر به این بیماری مبتلا شوند.

• فقط نفر A به این بیماری مبتلا شود.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.56 = 0.14$$

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

• فقط یکی از این دو نفر به این بیماری مبتلا شود.

$$0.7 + 0.8 - 2 \times 0.56 = 0.38$$

• حداقل یکی از این دو نفر به این بیماری مبتلا شوند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$$

• هیچ کدام از این دو نفر به این بیماری مبتلا نشوند.

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.94 = 0.06$$

۲۵- دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می‌کنیم.

• اگر بدانیم مجموع عدد رو شده در دو تاس ۸ شده است، احتمال اینکه تاس سفید ۵ آمده باشد را به دست آورید.

$$A = \{(2,4), (4,2), (5,3), (3,5), (6,2)\} \rightarrow n(A) = 5$$

$$A \cap B = \{(5,3)\} \rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$$

• اگر بدانیم تاس سفید ۵ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۸ شده باشد را به دست آورید.

$$B = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} \rightarrow n(B) = 6$$

$$A \cap B = \{(5,3)\} \rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{6}$$



۲۶- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. اگر بدانیم این خانواده حداقل ۲ فرزند دختر دارد، احتمال آنکه فرزند اول این خانواده پسر باشد را به دست آورید.

$$A = \{ (DDP), (DPD), (PDD), (DDD) \} \rightarrow n(A) = 4$$

$$A \cap B = \{ (PDD) \} \rightarrow n(A \cap B) = 1 \rightarrow P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{4}$$

۲۷- احتمال اینکه علی در درس ریاضی و فیزیک قبول شود، به ترتیب $\frac{7}{10}$ و $\frac{8}{10}$ است. اگر احتمال قبولی علی در درس ریاضی به شرط آنکه در درس فیزیک قبول شود برابر $\frac{7}{5}$ باشد، احتمال آنکه:

$$P(A) = 0.17$$

$$P(B) = 0.18$$

• علی در حداقل یکی از این دو درس قبول شود را به دست آورید.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow 0.175 = \frac{P(A \cap B)}{0.18} \rightarrow P(A \cap B) = 0.14$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.17 + 0.18 - 0.14 = 0.21$$

• علی فقط در یکی از این دو درس قبول شود را به دست آورید.

• علی در درس فیزیک قبول شود به شرطی که بدانیم در درس ریاضی قبول شده است به دست آورید.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.14}{0.17} = \frac{14}{17}$$

۲۸- اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $P(B')$ را به دست آورید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{2}{5} P(B)$$

$$\frac{1}{10} = \frac{3}{5} P(B) \rightarrow 1 = 6 P(B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{6} \rightarrow P(B') = \frac{5}{6}$$

۲۹- اگر $P(A) = \frac{3}{4}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ باشد، مقدار $P(A|B)$ را به دست آورید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - P(A \cap B) \rightarrow \frac{4}{5} - \frac{17}{12} = -P(A \cap B)$$

$$\frac{48 - 85}{60} = -P(A \cap B) \rightarrow \frac{37}{60} = P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{37}{60}}{\frac{2}{3}} = \frac{37}{40}$$

آمار

۱۰٪ : میانگین = چندین داده

$Q_1 = 6$ $Q_2 = 10$ $Q_3 = 14$
 ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۷

داده های بین چارک اول و چارک سوم را مشخص کنید و:

۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳

۱) میانگین داده‌ها را حساب کنید

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N} = \frac{7 + 8 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 12 + 13}{9} = \frac{90}{9} = 10$$

۲) دامنه تغییرات را مشخص کنید

$$R = \max - \min = 13 - 7 = 6$$

۳) انحراف داده‌ها از میانگین را به دست آورید

$$(x_i - \bar{X}) = (7-10), (8-10), (8-10), (9-10), (10-10), (11-10), (12-10), (12-10), (13-10)$$

$$= -3, -2, -2, -1, 0, 1, 2, 2, 3$$

***مجموع انحرافات از میانگین همواره صفر است**

۴) مجذور انحراف داده‌ها از میانگین را به دست آورید

$$(x_i - \bar{X})^2 = (7-10)^2, (8-10)^2, (8-10)^2, (9-10)^2, (10-10)^2, (11-10)^2, (12-10)^2, (12-10)^2, (13-10)^2$$

$$= 9 + 4 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 4 + 9 = 36$$

۵) واریانس داده‌ها را حساب کنید (میانگین مجذور انحراف داده‌ها از میانگین)

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{N} = \frac{9 + 4 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 4 + 9}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

۶) انحراف معیار داده‌ها را حساب کنید

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{4} = 2$$

۷) ضریب تغییرات داده‌ها را حساب کنید

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{2}{10} = 0.2$$

CV: کمتر



۳۰- میانگین ۱۲ داده آماری، ۱۷ و میانگین ۱۸ داده آماری، ۲۱ است. میانگین ۳۰ داده آماری را به دست آورید.

$$\bar{x}_1 = \frac{\text{مجموع ۱۲ داده}}{۱۲} \rightarrow ۱۷ = \frac{\text{مجموع ۱۲ داده}}{۱۲} \rightarrow \text{مجموع} = ۲۰۴$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\text{مجموع ۱۸ داده}}{۱۸} \rightarrow ۲۱ = \frac{\text{مجموع ۱۸ داده}}{۱۸} \rightarrow \text{مجموع} = ۳۷۸$$

$$\bar{x} = \frac{۳۷۸ + ۲۰۴}{۳۰} = \frac{۵۸۲}{۳۰} = ۱۹.۴$$

۳۱- اگر واریانس داده‌های $2a - 4$ ، $2b - 2$ ، $4c - 8$ و برابر صفر باشد، واریانس داده‌های a ، b و c کدام است؟

$$2a - 4 = 0 \rightarrow a = 2$$

$$2b - 2 = 0 \rightarrow b = 1$$

$$4c - 8 = 0 \rightarrow c = 2$$

$$\bar{x} = \frac{2 + 1 + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}{3} = \frac{2}{3}$$

۳۲- میانگین و واریانس داده‌های x_1, \dots, x_N به ترتیب برابر ۹ و ۱۷ است. میانگین، واریانس، انحراف معیار و ضریب

تغییرات داده‌های هر یک از دسته‌های زیر را به دست آورید.

• $x_1 + 5, x_2 + 5, \dots, x_N + 5$

$$\bar{x} = 22, \sigma^2 = 9, \sigma = 3$$

• $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_N$

$$\bar{x} = 18, \sigma^2 = 36, \sigma = 6$$

• $4x_1 - 1, 4x_2 - 1, \dots, 4x_N - 1$

$$\bar{x} = 47, \sigma^2 = 144, \sigma = 12$$

احتمال جدید روک در دست
روک شانس سه گزینی کمینا
روک شانس بی‌اندیشی
در واریانس: توان ۲
انحراف معیار: توان ۱
احتمال نهایی

۳۳- نمرات ریاضی دو دانش آموز A و B در پنج آزمون داخلی به صورت روبه‌رو است:

A: 18, 16, 18, 19, 19 $\Rightarrow \bar{x}_A = \frac{18+16+18+19+19}{5} = 18$

B: 18, 20, 19, 16, 17

$$\bar{x}_B = \frac{18+20+19+16+17}{5} = 18$$

عملکرد کدام یک بهتر است؟

$$\sigma_A^2 = \frac{0+4+1+1}{5} = \frac{6}{5} \rightarrow \sigma_A = \sqrt{\frac{6}{5}} \rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}}}{18}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{0+4+1+4+1}{5} = 2 \rightarrow \sigma_B = \sqrt{2} \rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

CV_A < CV_B
بنابراین A بهتر است