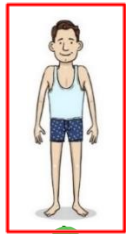


فصل ۱- درس ۱- شمارش

♦ **شمارش:** یعنی پیدا کردن تعداد حالات انجام کاری به وسیله‌ی محاسبات. ابزارهای مورد استفاده: اصل جمع، اصل ضرب، جایگشت و انتخاب (ترتیب و ترکیب).



♦ **اصل جمع و ضرب:**



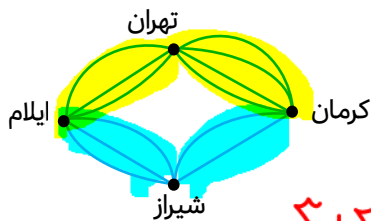
✓ **نکته:** اگر بخوایم کار اول (به m طریق) یا کار دوم (به n طریق) رو انجام بدیم (به جای هم)، تعداد حالات از اصل جمع حساب میشه: $m + n$ روش.

✓ **نکته:** اگر بخوایم کار اول (به m طریق) و کار دوم (به n طریق) رو انجام بدیم (همزمان)، تعداد حالات از اصل ضرب حساب میشه: $m \times n$ روش.

✓ **نکته:** توجه کنین که تو اصل ضرب هر کدام از m طریق کار اول به n طریق انجام میشه.

✓ **نکته:** این اصول برای بیش از دو مرحله هم قابل تعمیم هستن.

▼ **تمرین:** با توجه به نقشه زیر (مسیرها دو طرفه)، به چند طریق می‌توان:



(الف) از ایلام به کرمان رفت و از تهران گذر کرد؟

$$3 \times 2 = 12$$

(ب) از ایلام به کرمان رفت؟

$$3 \times 2 + 3 \times 2 = 12 + 6 = 18$$

(پ) از ایلام به کرمان از طریق شیراز رفت و برگشت؟

$$3 \times 2 \times 2 \times 3 = 6 \times 6 = 36$$

▼ **تمرین:** با حروف کلمه‌ی «ولایت» چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 6$$

♦ **معرفی نماد فاکتوریل (!):** نمادی در ریاضی که بیانگر حاصل ضرب اعداد طبیعی متوالی که از یک شروع میشن هست:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$0! = 1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

♦ **جایگشت (!):** می‌توان n شی مختلف را به $n!$ طریق کنار هم چید.

▼ **تمرین:** تعداد حالات موارد خواسته شده را بدست آورید:

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$3! = 6$$

(ب) عدد پنج رقمی با ارقام متمایز {۱, ۲, ۳, ۴, ۵}

(ب) صف بستن ۶ دانش‌آموز

(الف) سخنرانی سه نفر C و B و A

▼ **تمرین:** چند عدد پنج رقمی با ارقام متمایز {۰, ۱, ۲, ۳, ۴} می‌توان نوشت؟

$$5! = 120$$

$$\frac{24}{96} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 96$$

صفر نه تونست میباید

روشن خنده
روشن صبح



♦ نکات عددنویسی:

✓ **زوج یا فرد بودن عدد:** صفر نمی‌تونه سمت چپ بشینه. عددی فرد که یکانش فرد و عددی زوج که یکانش زوج باشه.

✓ **بخش پذیر بودن بر ۵:** عددی بر ۵ بخش پذیره که یکانش صفر یا ۵ باشه.

▼ **تمرین:** ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مفروض اند؛ با این ارقام:

۱- چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۲- چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۳- چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$\begin{aligned} & \underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 120 \\ & \underline{4} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 192 \end{aligned}$$

۴- چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

کتاب درسی

$$\underline{5} \underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} = 900$$

$$\underline{4} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 288$$

$$\underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 120$$

$$\underline{4} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 96$$

♦ **انتخاب:** در تعداد حالات انتخاب r شی از n شی با توجه به اهمیت جایگشت بعد از انتخاب دو حالت داریم:

تبدیل	ترکیب
جایگشت بعد از انتخاب اهمیت دارد.....	جایگشت بعد از انتخاب اهمیت ندارد.....
$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C(n, r) = C\left(\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

▼ **تمرین:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

$$\underline{7} \underline{6} \underline{5} = 210$$

روش اول:

* در عدد نویسی ترتیب اهمیت دارد.....

$$\left(\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix}\right) \times 3! = \frac{7!}{3! \times 4!} \times 3! = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

روش دوم:

▼ **تمرین:** به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه دهیم؟

$$\left(\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix}\right) = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

* در هدیه دادن ترتیب اهمیت ندارد.....

$$\left(\begin{matrix} 9 \\ 6 \end{matrix}\right) = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = 84$$

▼ **تمرین:** به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

* در تشکیل تیم ترتیب اهمیت ندارد.....

$$\left(\begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix}\right) = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

* در تشکیل زیرمجموعه ترتیب اهمیت ندارد.....

▼ **تمرین:** مجموعه‌ای ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

▼ تمرین: در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توان سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

$$\binom{9}{3} = 84$$

* در انتخاب مهره‌ها ترتیب اهمیت ندارد.....

▼ تمرین: بین ۱۰ تیم فوتبال که قرار است به صورت رفت و برگشت بازی کنند. چند بازی برگزار خواهد شد؟ تمرین کتاب

$$\binom{10}{2} \times 2! = 45 \times 2 = 90$$

$$P(10, 2) = 90$$

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45$$

▼ تمرین: از بین ۵ کارمند زن و ۴ کارمند مرد می‌خواهیم یک کمیته ۳ نفره تشکیل دهیم به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به طوری که:

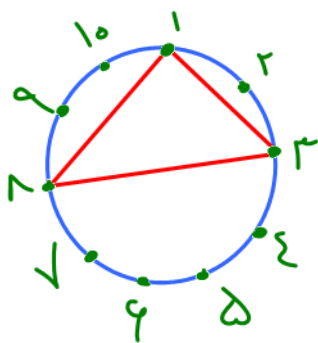
$$\binom{9}{3} = 84$$

(الف) جنسیت مهم نباشد.

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{2} = 5 \times 6 = 30$$

(ب) کمیته متشکل از یک زن و دو مرد باشد.

▼ تمرین: ۱۰ نقطه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ روی محیط دایره‌ای در نظر بگیرید:



$$\binom{10}{2}$$

(الف) چند وتر می‌توان رسم کرد؟

$$\binom{10}{3}$$

(ب) چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

$$\binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2}$$

(پ) چند مثلث که نقطه‌ی ۲ حتماً یکی از رئوس آن باشد می‌توان رسم کرد؟

$$\binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2}$$

(ت) چند مثلث می‌توان رسم کرد که اصلاً از نقطه‌ی ۱۰ استفاده نشود؟

فصل ۱- درس ۲- احتمال

♦ انواع پدیده در احتمال: ۱- قطعی (حتمی) ۲- تصادفی ۳- غیرممکن (نشدنی)

▼ تمرین: کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟

(الف) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛ تصادفی

(ب) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ قطعی

♦ برآمد: هر حالتی که در پدیده تصادفی اتفاق می‌فته:

برآمدهای پرتاب تاس سالم: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶



پسر و دختر: برآمد فرزند سالم



♦ فضای نمونه‌ای (S): مجموعه کل حالاتی که به پدیده تصادفی می‌تونه اتفاق بیفته:

فضای نمونه‌ای پرتاب تاس سالم $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

♦ **تعداد فضای نمونه‌ای** ($n(s)$): یافتن تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در حقیقت همون بحث **شمارشه**:

▼ **تمرین**: برای هر یک از حالات زیر تعداد فضای نمونه ای را مشخص کنید:

(الف) پرتاب دو سکه: $2 \times 2 = 4$ (ب) پرتاب یک تاس و یک سکه: $6 \times 2 = 12$ (پ) انتخاب ۴ کتاب از ۷ کتاب: $\binom{7}{4} = 35$

♦ **پیشامد**: هر زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای:

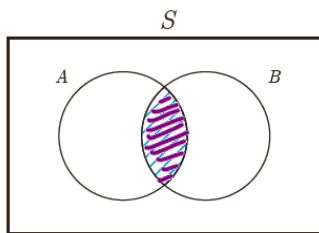
✓ **پیشامد غیر ممکن** همان زیرمجموعه تهی و **پیشامد حتمی** همان فضای نمونه‌ای هستند.

$\{ \}$ و $\{ر\}$ و $\{پ\}$ و $\{ر\}$ → تمام پیشامدهای پرتاب سکه

▼ **تمرین**: برای هر یک از حالات زیر پیشامد را مشخص کنید.

(الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشند: $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
 (ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد: $B = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$
 (پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد: $C = \emptyset = \{ \}$
 (ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد: $D = S$ (فضای نمونه)

♦ **اعمال روی پیشامدها**: خیلی وقتا خواسته ی مسئله ترکیبی هست:

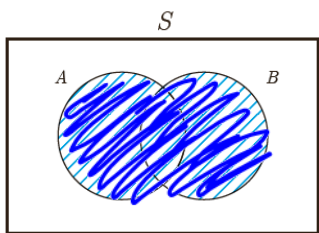


$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$

۱- **اشتراک (و)**

▼ **تمرین**: در پرتاب دو تاس، پیشامد آنکه یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع دو تاس ۶ باشد.

$\{(1,5), (5,1)\}$

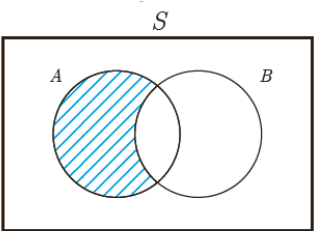


$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$

۲- **اجتماع (یا)**

▼ **تمرین**: در پرتاب دو تاس پیشامد آنکه دو تاس یکسان یا مجموع دو تاس ۴ باشد.

$\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,3), (3,1)\}$



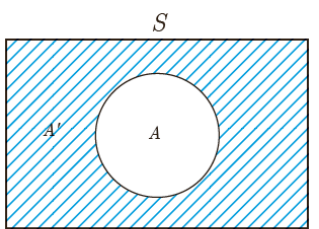
$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

۳- **تفاضل (این بشه اما اون نشه، این بشه ولی اون نشه)**

▼ **تمرین**: در پرتاب یک تاس، عدد رو شده زوج باشد ولی اول نباشد.

$\{2, 4, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{4, 6\}$

۴- **متکم (اون نشه)**

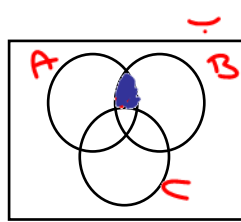
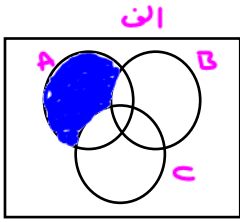


$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$

▼ **تمرین**: در پرتاب یک تاس، عدد رو شده زوج نباشد.

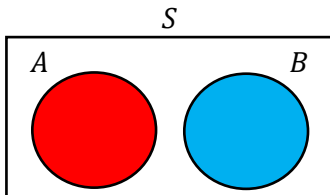
$A' = S - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$

تمرین: مجموعه A ، B و C را در فضای نمونه‌ای S در نظر بگیرید. سپس مجموعه‌های خواسته شده را در نمودارون رسم کنید.



(الف) $A - (B \cup C)$

(ب) $A \cap (B - C)$



پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامدی که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند:

$$A \cap B = \emptyset, \quad n(A \cap B) = 0$$

تمرین: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، فضای نمونه‌ای و پیشامدهای زیر را بنویسید و سازگاری آنها را بررسی کنید.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$3! = 6$

(الف) همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند:

(ب) دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند:

(پ) حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند:

احتمال وقوع یک پیشامد:

$$\text{احتمال یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد پیشامد مطلوب}}{\text{فضای نمونه‌ای}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{نشدنی} = \{ \} = \emptyset$$

$$P(\text{نشدنی}) = 0$$

نکته: احتمال پیشامد نشدنی صفر:

$$\text{حتمی} = S$$

$$P(\text{حتمی}) = 1$$

احتمال پیشامد حتمی یک همیشه:

$$\text{تصادفی} = A$$

$$0 < P(A) < 1$$

احتمال پیشامد تصادفی A هر چی باشه بین صفر و یک:

نکته: هر چه پیشامد کوچکتر باشد، احتمال آن نیز کمتر است.

تمرین: در پرتاب دو تاس احتمال آنکه دومین عدد رو شده ۲ برابر عدد اول باشد؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

تمرین: در پرتاب یک تاس احتمال آنکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد؟

$$n(S) = 6$$

$$A = \{4, 6\}$$

$$n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

تمرین: در یک خانواده‌ی ۴ فرزند احتمال آنکه تعداد پسرها کمتر باشد؟

$$n(S) = 2^4 = 16$$

تمرین: در یک گروه، ۵ نفر دهم، ۳ نفر یازدهم و ۲ نفر دوازدهم؛ میخواهیم ۳ نفر را انتخاب کنیم، احتمال آنکه از هر پایه یک نفر انتخاب شوند؟

$$\frac{{}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5C_1}{{}^{10}C_3} = \frac{2 \times 3 \times 5}{10 \times 9 \times 8 \div 6} = \frac{1}{6}$$

تمرین: یک تاس قرمز و یک تاس سبز را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد کدام است؟

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$n(A) = 6$$

$$n(S) = 36$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

تمرین: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال: (نوشتن پیشامد الزامی است)

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

(الف) تاس زوج باشد: $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

(ب) سکه پشت باشد: $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

(پ) تاس فرد و سکه پشت بیاید: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(ت) تاس زوج یا سکه رو بیاید: $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

تمرین: یک تاکسی دارای ۳ سرنشین است، احتمال هر یک از حالات زیر را بیابید:

(الف) هر ۳ نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند:

$$\frac{1 \times 1 \times 1}{12 \times 12 \times 12} = \frac{1}{12^3}$$

(ب) هر ۳ نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند:

$$\frac{1 \times 1 \times 1}{12 \times 12 \times 12} \times 12 = \frac{1}{12^2}$$

(پ) هیچ دو تای آنها در یک ماه متولد نشده باشند:

$$\frac{12 \times 11 \times 10}{12 \times 12 \times 12}$$

تمرین: ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه پرچم ها با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}$$

$$\frac{{}^6P_3 \times {}^3P_2}{{}^7P_7} = \frac{1}{100}$$

محاسبه احتمال از طریق احتمال پیشامد متمم:

تمرین: احتمال اینکه فردا بارانی باشد $\frac{9}{100}$ است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

تمرین: پیشامد ظاهر نشدن اعداد مضرب ۳ در پرتاب یک تاس سالم را بنویسید و احتمال آن را محاسبه کنید.

$$1 - \frac{2}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

▼ **تمرین:** در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت-آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد. احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

$$1 - \frac{\binom{2}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{2}{120} = \frac{120}{120} - \frac{2}{120} = \frac{118}{120}$$

فصل ۱- درس ۳ - چرخه آمار در حل مسائل



♦ **چرخه آمار در حل مسائل:** در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری به مسئله در محیط زندگی تا یافتن پاسخش، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم. حل مسائل آماری به صورت چرخه‌ای شامل چند گام روبرو است: چرا فرآیند حل مسئله به صورت چرخه است؟

♦ شرح گام‌ها چرخه:

(۱) **بیان مسئله:** طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهمترین گام رسیدن به پاسخ؛ بنابراین: ۱- باید مسئله به درستی درک بشه؛ ۲- مسئله به طور دقیق تعریف و بیان بشه؛ ۳- با توجه به بودجه، زمان و ...، جامعه‌ی آماری محدود بشه؛ ۴- هدف مطالعه مشخص بشه. ▼ **مثال:** «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد از میان پسران ۱۳ تا ۱۵ ساله‌ی یک مدرسه‌ی مشخص در کرمانشاه»

(۲) **طرح و برنامه‌ریزی:** در این مرحله در بارهٔ موارد زیر تصمیم‌گیری می‌کنیم:

۱- چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر ۲- اندازه‌ی نمونه ۳- چگونگی نمونه‌گیری ۴- شیوه‌ی تحلیل داده‌ها

✓ **نکات:** ۱- اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. ۲- در اندازه‌گیری بهتر است اطلاعات توصیفی (کیفی) تا حد امکان به اطلاعات عددی (کمی) تبدیل بشه. ۳- با توجه به اهمیت اندازه‌گیری، حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کنندهٔ پژوهش بسیار مهم است. ۴- هر چه اندازهٔ جامعهٔ مورد بررسی در جامعه بیشتر باشه، به اندازهٔ نمونهٔ بزرگتری نیاز داریم که مطمئن بشیم نمونه تنوع و پراکندگی لازم رو داره.

▼ **تمرین:** برای بررسی میزان مطالعهٔ شهروندان یک شهر بزرگ، کدام نمونه برای گردآوری داده بهتر است؟ چرا؟

تنوع دیدگاه‌های بیشتر

(الف) افراد حاضر در کتابخانه‌های عمومی

(ب) افراد حاضر در تمام اماکن تجاری، تفریحی و ... ✓

(۳) **گردآوری و پاکسازی داده‌ها:** در این مرحله اعمال زیر انجام میشه: ۱- اندازه‌گیری با روش‌هایی که در گام دوم تایید و تصویب شده ۲- گردآوری داده‌ها ۳- تصحیح اشتباهات ممکن (پاکسازی داده‌های ناقص یا دورافتاده). ▼ **مثال:** سن دانش‌آموزی بجای ۱۵، ۵۱ ثبت شده باشه یا سطح علمی بعضی کمی (نمره) و بعضی کیفی (مثبت یا منفی) باشه.

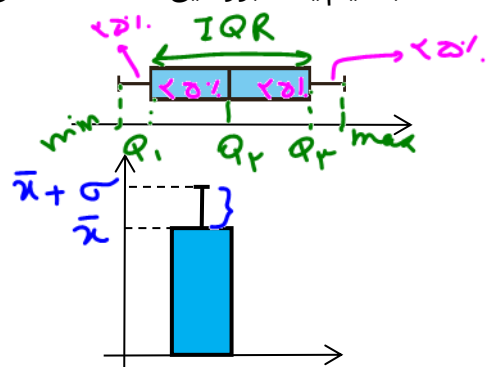
۴) تحلیل داده‌ها: منظور از تحلیل داده‌ها گزارش شاخص‌ها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماریه.

✓ نکات: ۱- برای توصیف داده‌های کمی باید شاخص مرکزی و پراکندگی گزارش بشه؛ ۲- برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشه؛ مثال: از بین ۲ نفر، ۱ نفر معادل ۵۰٪ کله، از بین هزار نفر، ۵۰۰ نفر هم معادل ۵۰٪ کله. پس خیلی مهمه که چند درصد از چقدر.

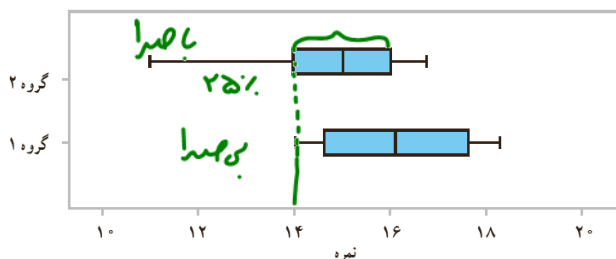
▼ تمرین: قبولی مدرسه اول ۱۰۰ درصد افزایش یافته و قبولی مدرسه دوم ۱۰ افزایش یافته است. عملکرد کدام مدرسه بهتر است؟
دومر ← تعداد

۳- شاخص‌های مرکزی (میان و میانگین) به ما می‌گن که داده‌ها در کجا متمرکزن. ۴- شاخص‌های پراکندگی (دامنه، میان چارکی، انحراف معیار) به ما می‌گن که داده‌ها چطوری متمرکز یا پراکنده هستن. ۵- با توجه به اینکه داده‌ی دورافتاده یا پرت داشته باشیم یا نه ابزارهایی که استفاده می‌کنیم متفاوت میشن.

شاخص مرکزی	اگر داده‌ی پرت داشته باشیم	اگر داده‌ی پرت نداشته باشیم
میان	میانگین	میانگین
دامنه	دامنه	دامنه
انحراف معیار	انحراف معیار	انحراف معیار
پراکندگی	پراکندگی	پراکندگی
نمودار	نمودار	نمودار



▼ تمرین: نمودارهای زیر مربوط به نمرات دو گروه دانش‌آموزی می‌باشد. گروه ۱ با گوشه بی‌صدا و گروه ۲ با گوشه باصدا درس خوانده‌اند. با توجه به نمودارها به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) پراکندگی کدام گروه کمتر است؟ گروه ۲

ب) از مقایسه چارک اول گروه ۲ و کمترین نمره گروه ۱ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵) نتیجه‌گیری و تفسیر نتایج: پس از تحلیل باید بتوانیم با تفسیر نتایج پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم.

♦ خلاصه مختصر مفید:

گام	نام گام	توضیح گام
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای رو که تو دنیای واقعی وجود داره به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۳	گردآوری و پاکسازی داده‌ها	داده‌ها رو گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی اونا مطمئن می‌شیم.
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیمی که بلدیم، نتایج رو متناسب با هدف‌های کارمون، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	نتایج به دست اومده رو تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.

فصل ۲- درس ۱- الگو و مدل‌سازی

♦ **مدلسازی:** بیان ریاضی به مسئله (مدلسازی) و یافتن الگو به ما امکان پیش‌بینی می‌دهد.

♦ **مقادیر پیوسته و گسسته:** مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، پیوسته و مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ ، گسسته هستند.

▼ **تمرین:** مشخص کنید دامنه‌ی هر یک از توابع توصیفی ذکر شده، زیرمجموعه اعداد طبیعی یا حقیقی است؟

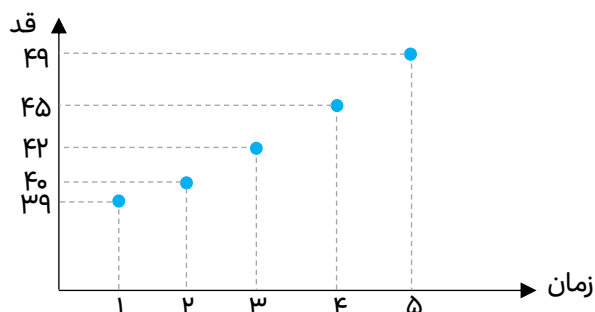
الف) دمای خانه در هر لحظه از شبانه‌روز $\mathbb{R}$ **ب)** تعداد گل زده قهرمان جام جهانی از اولین روز $\mathbb{N}$

♦ **مدلسازی رشد قد نوزاد:** قد نوزاد هر ماه یکبار اندازه‌گیری بشه:



زمان	ماه ۱	ماه ۲	ماه ۳	ماه ۴	ماه ۵
قد نوزاد	۳۹	۴۰	۴۲	۴۵	۴۹

۳۹, ۴۰, ۴۲, ۴۵, ۴۹, ...



♦ **دنباله:** به چند تا عدد حقیقی پشت سر هم هست رو می‌گیم دنباله. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

شماره یا جایگاه جملات اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ هستند ولی خود جملات می‌تونن هر مقداری از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشن.

دنباله در حقیقت یک تابع است که دامنه‌ی آن اعداد طبیعی است: $f(x) : D \rightarrow R \xRightarrow{\text{دنباله}} a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

♦ **نمایش دنباله:** به دو روش کلی می‌شه دنباله رو نشون داد:

۱- **رابطه بازگشتی:** رابطه با جملات دیگر دنباله. باید ارتباط هر جمله رو با جمله دیگه‌ای بررسی کنیم:

$3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \Rightarrow$

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 3$$

۲- **ضابطه تابعی:** رابطه‌ای بر حسب n . باید ارتباط هر جمله رو با شماره‌ی جمله پیدا کنیم:

$$a_n = 2n + 1$$

$3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \Rightarrow$

▼ **تمرین:** برای دنباله $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ رابطه بازگشتی و ضابطه تابعی دنباله بنویسید.

♦ **تعیین جملات در دنباله:** $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 2$

۱) **به کمک رابطه بازگشتی:** نمی‌شه مستقلاً جمله‌ای رو محاسبه کرد، باید به کمک اون جمله‌ای که توی رابطه بازگشتی داده شده محاسبه رو شروع کرد. به صورتی که شمارنده جمله‌ای که داده رو می‌ذاریم توی رابطه.

$3, 8, 13, 18, 23, \dots$

$$a_{n+1} = a_n + 5; a_1 = 3$$

▼ **تمرین:** چهار جمله اول هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید.

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}; a_1 = a_2 = 1 \quad 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

▼ **تمرین:** در دنباله بازگشتی زیر جمله پنجم را مشخص کنید.



$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} ; a_1 = a_2 = a_3 = 2$$

۲, ۳, ۵, ۹, ۱۵, ۲۴, ...

(۲) به کمک ضابطه تابعی: مستقلاً هر جمله‌ای رو که خواستیم می‌تونیم حساب کنیم، فقط کافیه شمارندشو توی ضابطه تابعی دنباله جایگذاری کنیم:

تمرین: چهار جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید.

$$a_n = 2n$$

۲, ۴, ۶, ...

$$a_n = n^2 + 1$$

۲, ۵, ۱۰, ...

تمرین: اگر $a_n = n^2 + 2$ باشد، حاصل عبارات خواسته شده را بیابید.

$$a_3 + 5b_2 - c_1 = 9 + 5(1) - 3 = 9 + 5 - 3 = 11$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$$

$$c_n = \frac{n}{2} + 1$$

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$

تمرین: جمله چهارم هر یک از دنباله‌های زیر را مشخص کنید.

$$a_n = n+1$$

۲, ۱, ۴, ۲, ۷, ...

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{فرد} \\ 3a_n + 1 & \text{زوج} \end{cases}, a_1 = 2$$

$$a_n = \begin{cases} n & \text{فرد} \\ \frac{1}{n} & \text{زوج} \end{cases}$$

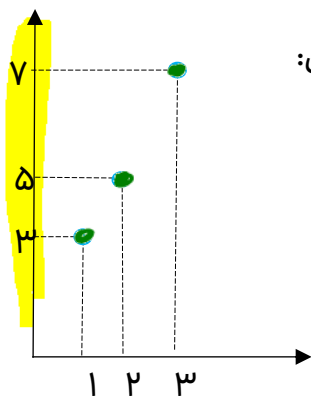
$$a_n = n$$

$$n=1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = 3a_2 + 1 = 3$$

$$n=3 \rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 10$$



رسم دنباله: بالاخره دنباله به نوع تابع و نمایش مختصاتی توابع رو هم که شما بلدین:

$$a_n = 2n + 1 \rightarrow 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$$

$$D =$$

$$R =$$

۳, ۵, ۷, ...

بررسی یک دنباله خاص: دنباله جذر اعداد به روش منسوب به تمدن بابل: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) ; a_1 = 2$

تمرین: در محاسبه جذر اعداد به روش منسوب به تمدن بابل اگر a_n تقریبی برای $\sqrt{k}$ باشد، جذر تقریبی عدد k را بیابید.

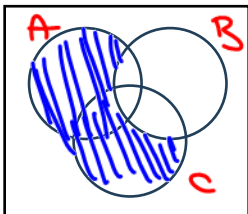
$$n=1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = 2$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732$$

$$3, 2, 1.75$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = 2$$

آزمون شبیه‌ساز ترم اول

۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) رابطه $\frac{n!}{n!} = 2!$ یک تساوی درست است. ✗ (ب) اگر داده دورافتاده داشته باشیم، گزارش شاخص میانه بهتر است. ✓ (پ) پیشامد $A - B$ وقتی رخ میدهد که فقط A رخ دهد. ✓ (ت) دامنه تابعی که دمای خانه را رأس هر ساعت نشان می‌دهد، مجموعه اعداد حقیقی است. ✗	۰/۵ ۰/۵ ۰/۵ ۰/۵
۲	جاهای خالی را عبارات مناسب پر کنید. (الف) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه $2^3 = 8$ عضو دارد. (ب) برای توصیف داده‌های کیفی، به هنگام گزارش حتماً باید تعداد نیز گزارش شود. $(5, 3) = 10$ (پ) حاصل $(5, 3)C$ برابر با 10 است. (ت) جمله پنجم دنباله $1 - 5^n$ برابر با 24 است.	۰/۵ ۰/۵ ۰/۵ ۰/۵
۳	با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد ۵ رقمی زوج با حروف غیرتکراری می‌توان ساخت؟ $\underline{5} \underline{4} \underline{3} \underline{2} \underline{1} = 290$ غیرصفر	۱/۵
۴	با حروف کلمه «منطق» چند ۴ حرفی می‌توان نوشت که با حرف «م» شروع شود؟ $\frac{1}{3} = 3!$	۱
۵	با ۹ نقطه روی محیط یک دایره با شماره‌های ۱ تا ۹ چند ۳ ضلعی می‌توان رسم کرد که نقطه ۲ استفاده نشود؟ $\binom{9-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$	۱/۵
۶	کدامیک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام قطعی می‌باشد؟ (الف) نمایش عدد ۷ در یک تاس که تمام وجوه آن عدد ۷ نوشته شده است. قطعی (ب) جنسیت فرزند متولد شده در یک خانواده. تصادفی	۱
۷	اگر A و B، C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد «A یا C رخ دهد ولی B رخ ندهد» را به صورت نمایش ریاضی (الف) $(A \cup C) - B$ (ب) نمودارون نشان دهید. 	۱



۱ ۰/۵ ۰/۵	در پرتاب یک سکه و یک تاس: (الف) فضای نمونه‌ای این پدیده را با اعضا نمایش دهید. (ب) پیشامد A که در آن سکه رو باشد را بنویسید. (پ) پیشامد B که در آن تاس زوج بیاید را بنویسید. $S = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$ $A = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \right\}$ $B = \left\{ (1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6), (4,2), (4,4), (4,6), (5,2), (5,4), (5,6), (6,2), (6,4), (6,6) \right\}$	۸
۱	در پرتاب دو تاس، با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده برابر ۵ می‌باشد؟ $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $\left\{ (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) \right\}$	۹
۲	در جعبه‌ای ۵ سیب سالم و ۳ سیب لکه‌دار وجود دارد. تصادفاً ۳ سیب انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال ۲ سیب سالم و ۱ سیب لکه‌دار می‌باشد؟ $\frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{10 \times 3}{56} = \frac{30}{56}$	۱۰
۰/۵	هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است؟ (الف) اهداف پروژه به طور دقیق مشخص نیست. (ب) میانگین سن دانش‌آموزان در یک پروژه ۳۲ سال محاسبه شده است. (پ) یال‌سازی	۱۱
۱	در مورد گفته، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ مسئله: نظرسنجی تلفنی از شهروندان یک شهر. نمونه: انتخاب شماره تلفن بر اساس دو رقم ابتدایی آن. دورقم آخر شماره تلفن منفعه	۱۲
۱	برای دنباله زیر رابطه بازگشتی و ضابطه تابعی بنویسید. $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 3$ $a_n = 3^n$ ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ...	۱۴
۱/۵	با توجه به دنباله‌های $c_n = 5^n$ و $b_n = \frac{1}{2n+1}$ و $a_n = n^2 + 3$، حاصل عبارت $a_n - 7b_n + c_n$ را به دست آورید. $7 - \frac{7}{2} + 25 = 4 + 25 = 29$ $2^2 + 3 = 7$ $5^2 = 25$	۱۵
۱	۳ جمله اول دنباله $a_n = a_{n-1} + (-1)^n$ را بنویسید. $n=1 \rightarrow a_2 = a_1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$ $n=2 \rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$ ۱, ۰, ۱, ...	۱۶