شب امتحان

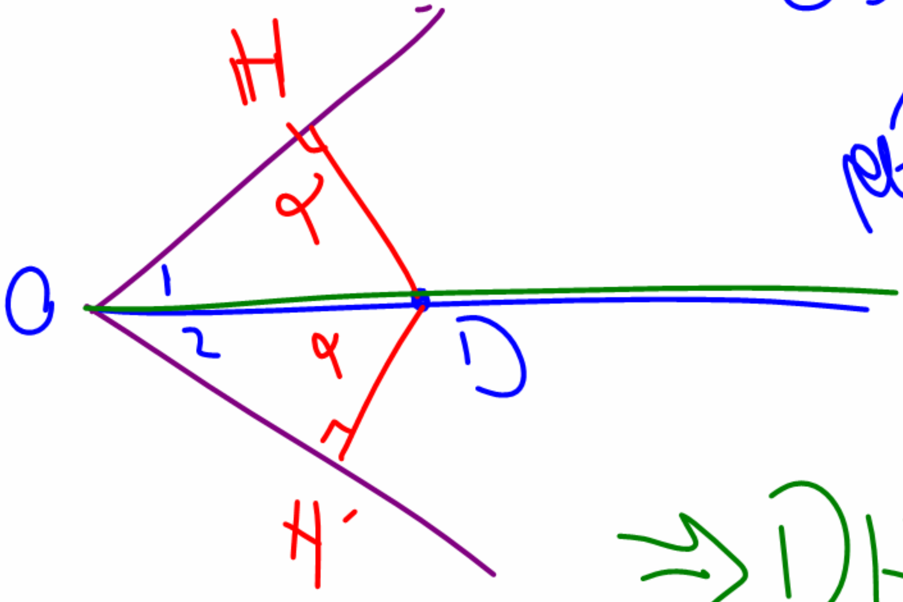
هندسه دهم بـــــا استاد ایمان ساریخانی

رسم نیمساز

عمود بودن

هر نقطه‌ی روی نیمساز یک زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است

فرض: OD نیمساز

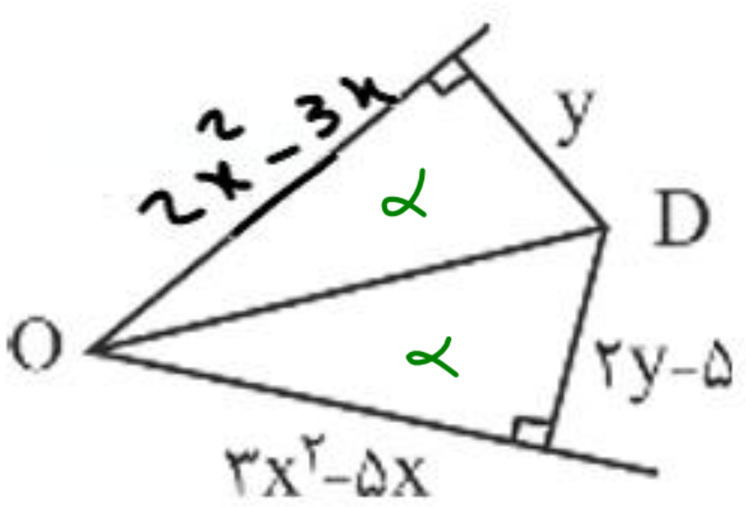


حکم: $DH = DH'$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OD = OD\end{array}\right. \longrightarrow \overset{\triangle}{OHD} \cong \overset{\triangle}{OH'D}$$

$$\Rightarrow DH = DH'$$

مثال: در شکل زیر اگر OD نیمساز باشد $x+y$ را بیابید.



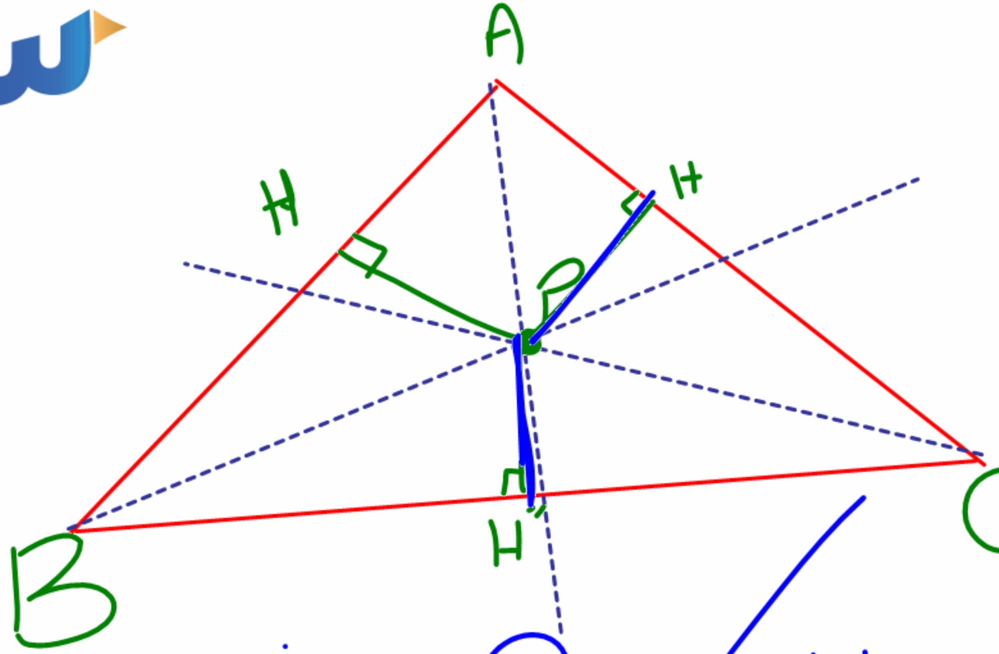
$$2y-5=y \rightarrow \boxed{y=5}$$

$$3x^2-5x=2x^2-3x$$

$$x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

* نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.



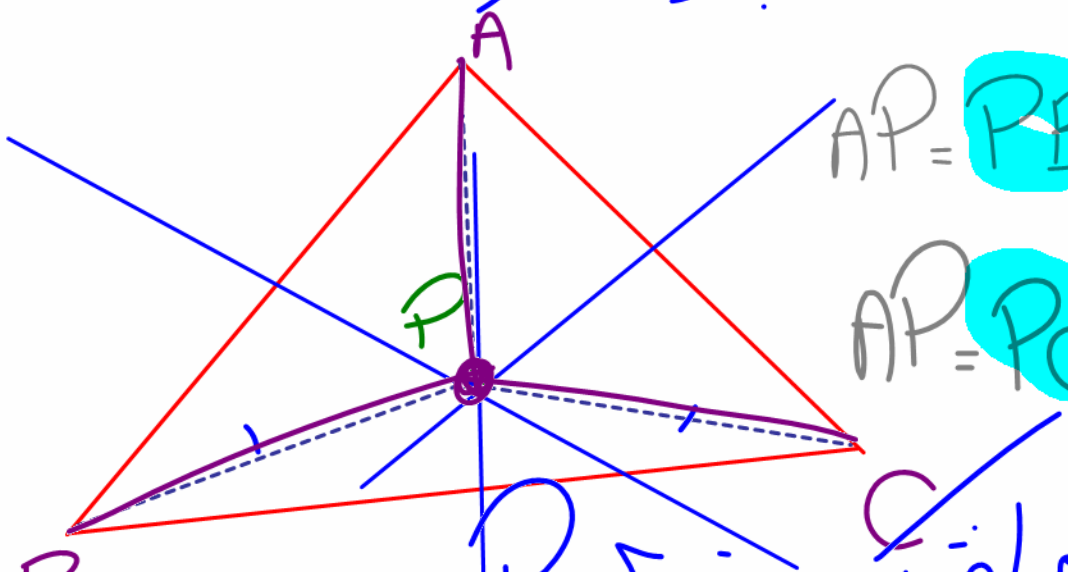
فرض کنیم P روی نیمساز $\hat{A}$ است $PH = PH'$

P روی نیمساز $\hat{B}$ است $\Leftarrow$ $PH = PH''$

$\Leftarrow$ $PH' = PH''$ زمانی این اتفاق می‌افتد که P روی نیمساز زاویه $\hat{C}$ نیز باشد پس P روی هر سه نیمساز است و نیمسازها یکدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند.

ویژگی عمود منصف: هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

عمود منصف‌های یک مثلث هم‌رسند.



* فرض کنیم که P روی عمود منصف AB است، پس: $AP = PB$

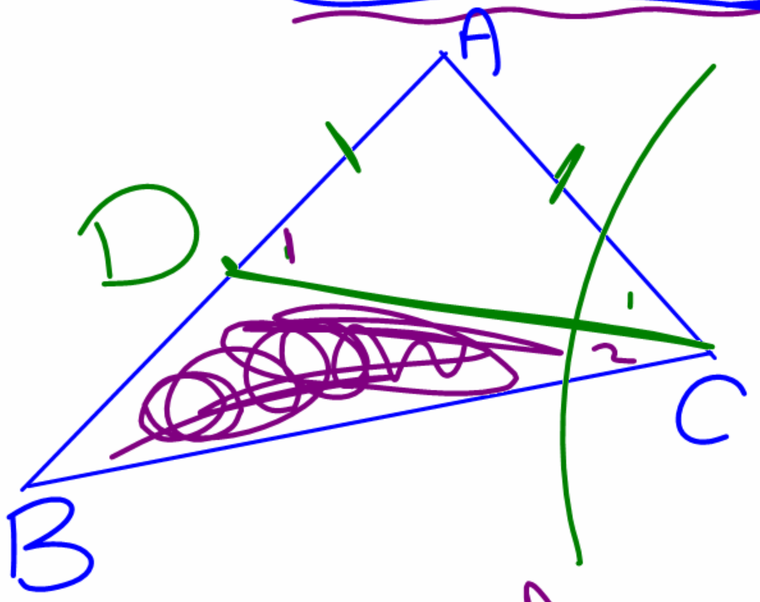
* ~ ~ ~ ~ ~ AC است، پس: $AP = PC$

$\Leftarrow PB = PC$ این اتفاق زمانی می‌افتد که نقطه P روی عمود منصف B

BC باشد پس P روی عمود منصف هر سه ضلع است.

* کدام نقطه است که از هر سه راس به یک اندازه است؟ P نقطه همرسی عمود منصف‌ها است!

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشد، زاویه‌ی روبرو به ضلع بزرگتر بزرگتر است از زاویه‌ی رو بـه رو به ضلع کوچکتر



فرض: $AB > AC$

حکم: $\hat{C} > \hat{B}$

مثلث ADC

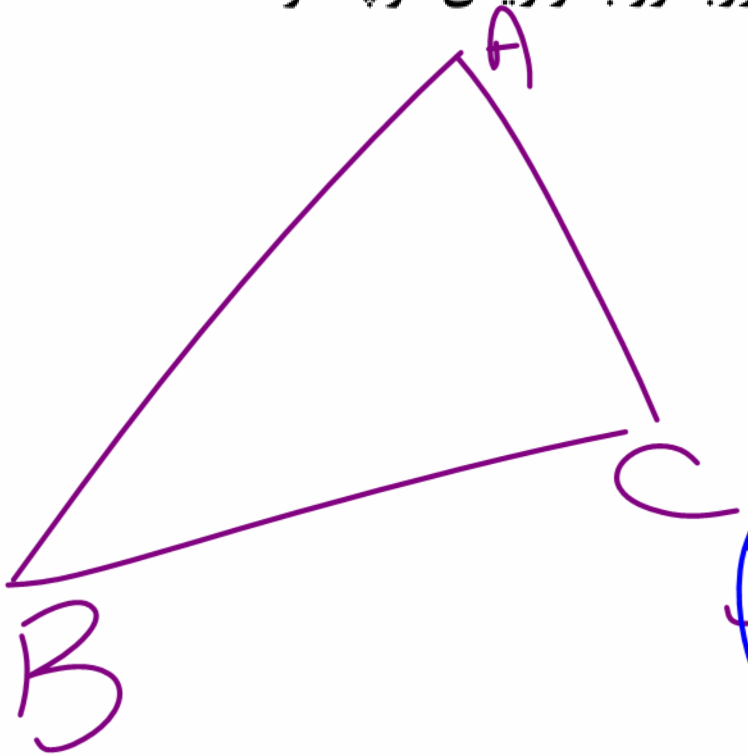
① به اندازه‌ی AC روی AB جدا می‌کنیم

متساوی الساقین $\Leftarrow$ $\hat{D}_1 = \hat{C}_1$

② خارجی $\hat{D}_1 = \hat{B} + \hat{C}_2 \Longrightarrow \hat{D}_1 > \hat{B} \longrightarrow \hat{C}_1 > \hat{B}$

$\hat{C} > \hat{C}_1 \Longrightarrow \hat{C} > \hat{B}$

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشد ضلع مقابل به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه رو به زاویه‌ی کوچکتر.



فرض : $\hat{C} > \hat{B}$

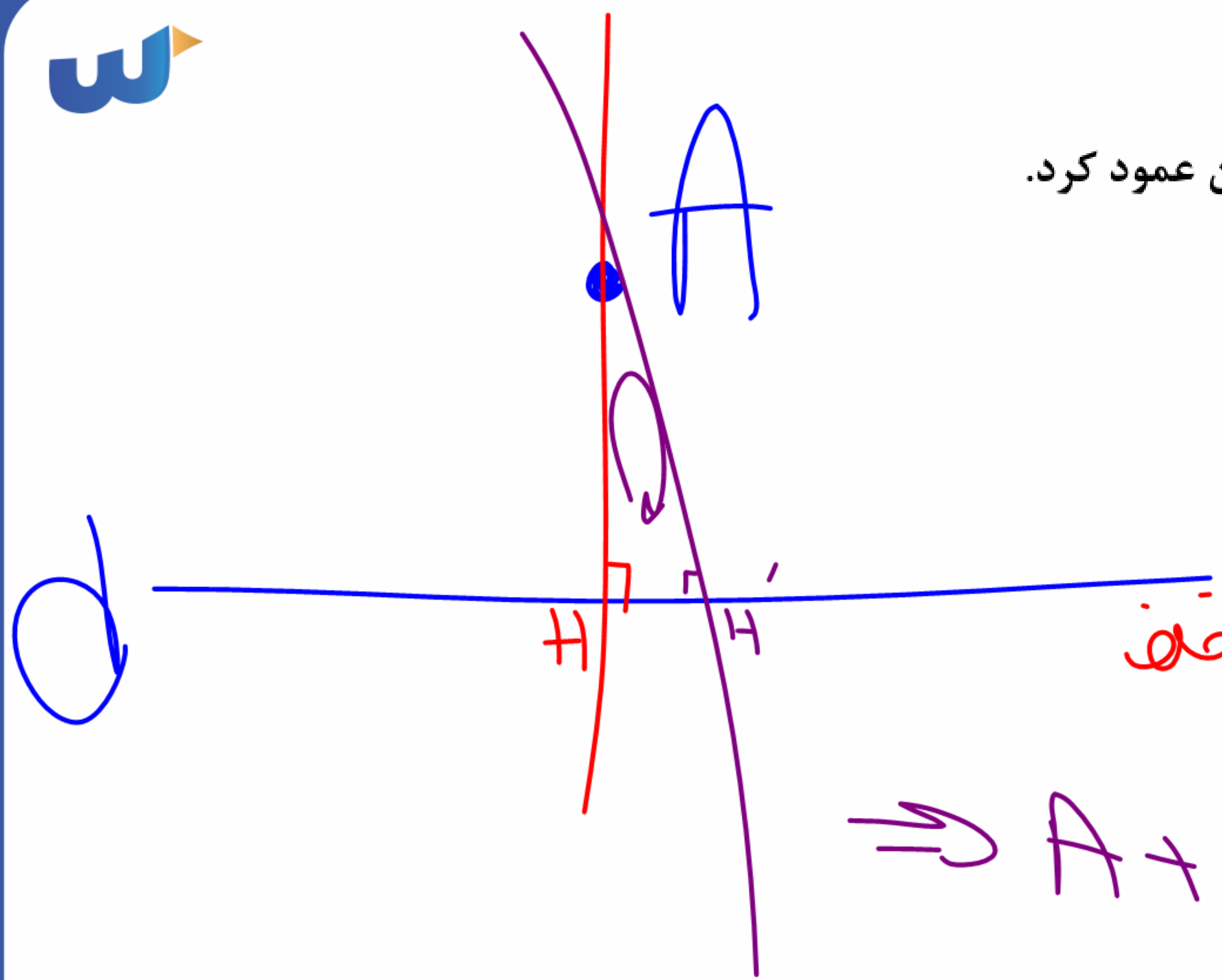
حکم : $AB > AC$

فرض خلف :

$AB = AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ ✗

$AB < AC \rightarrow \hat{C} < \hat{B}$ ✗

از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.



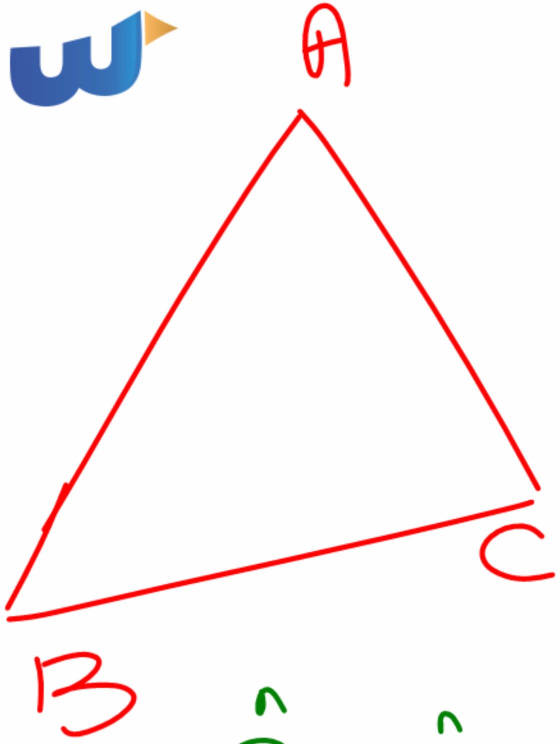
فرض: عمودها AH یا $\hat{H} = 90^\circ$

حکم: از A فقط یک خط می‌توان عمود کرد

فرض خلف: از A بیشتر از یک خط می‌توان عمود کرد.

$$\Rightarrow A + H + H' = 180$$

ثابت کنید اگر در هر مثلثی دو ضلع نابرابرباشد زاویه مجاور به آن دو ضلع نیز نابرابر است.



فرض: $AB \neq AC$

حکم: $\hat{B} \neq \hat{C}$

فرض خلف: $\hat{B} = \hat{C}$

اگر این اتفاق بیوفتد پس مثلث ABC

~~$AB = AC$~~ ← متساوی الساقین

برهان خلف
- فرض
- حکم
- فرض خلف ← $\boxed{\text{خلاف حکم}}$

واسطه‌ی هندسی

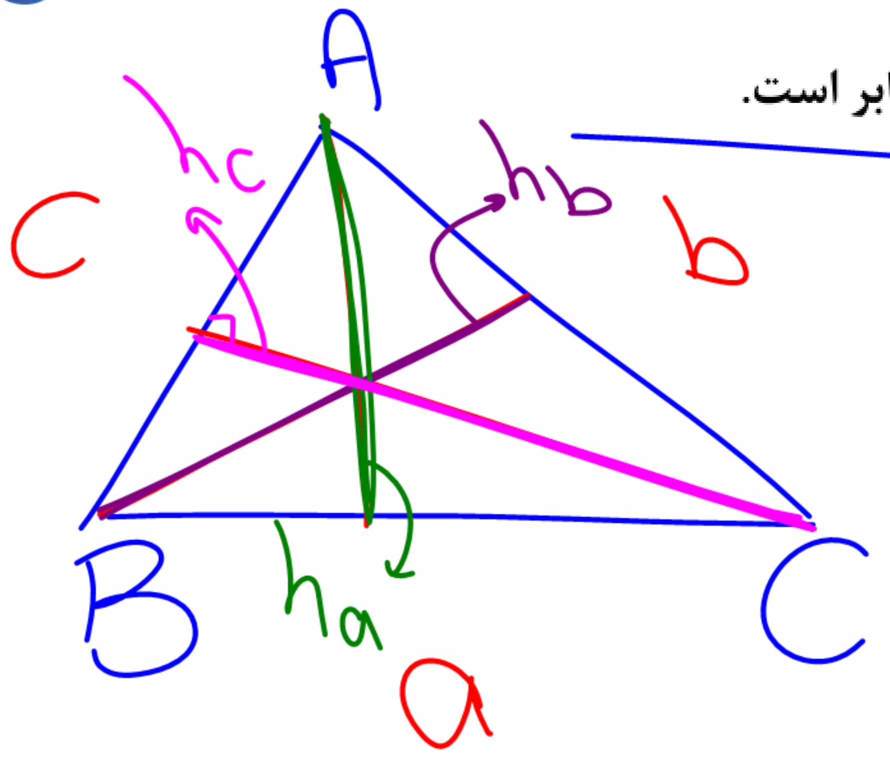
اگر تنابی به صورت $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ باشد و این صورت $b^2 = a.c$ است که به b واسطه‌ی هندسی می‌گوییم.

مثال: واسطه‌ی هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۱۰ و ۸ را بیابید.

$$x = \sqrt{8 \times 10} = 4\sqrt{5}$$

حاصل تقسیم

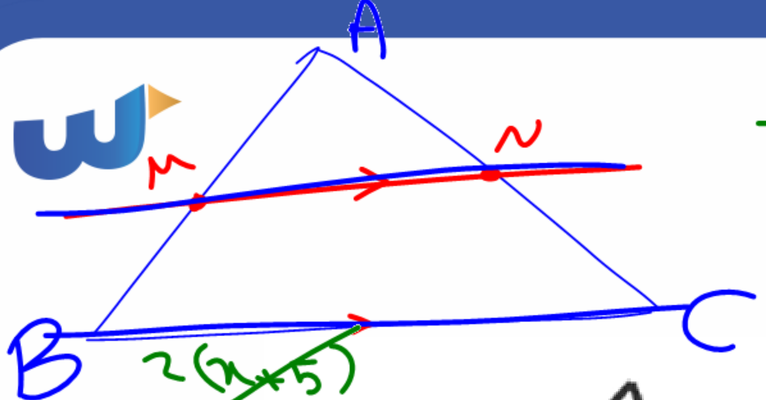
در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است.



مثلا: $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$

$$S = \cancel{\frac{1}{2}} \times h_a \times a = \cancel{\frac{1}{2}} \times h_b \times b$$

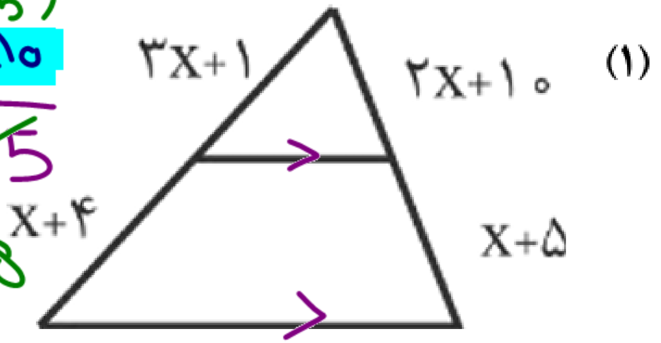
$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

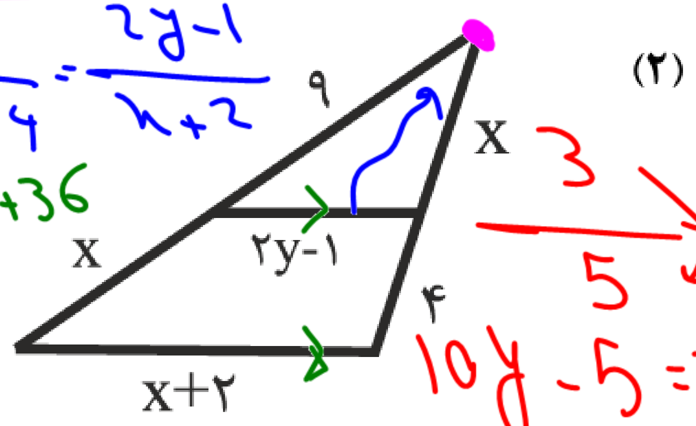
مثال: در هر یک از شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید.



$$\frac{3x+1}{x+4} = \frac{2x+10}{x+5}$$

$$3x+1 = 2x+8$$

$$\boxed{x=7}$$



$$\frac{9}{x+9} = \frac{x}{x+4} = \frac{2y-1}{x+2}$$

$$x^2+\cancel{9x} = \cancel{9x}+36$$

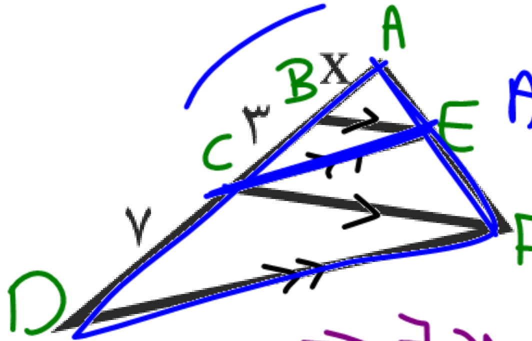
$$x^2=36$$

$$\boxed{x=6}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2y-1}{8}$$

$$10y-5=24$$

$$10y=29 \rightarrow y=\frac{29}{10}$$

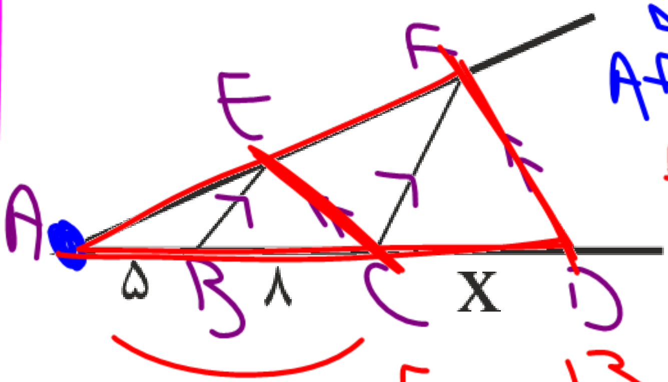


$$\overset{\triangle}{ACF}: \frac{x}{3} = \frac{AE}{EF}$$

$$\overset{\triangle}{ADF}: \frac{x+3}{7} = \frac{AE}{EF}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x+3}{7}$$

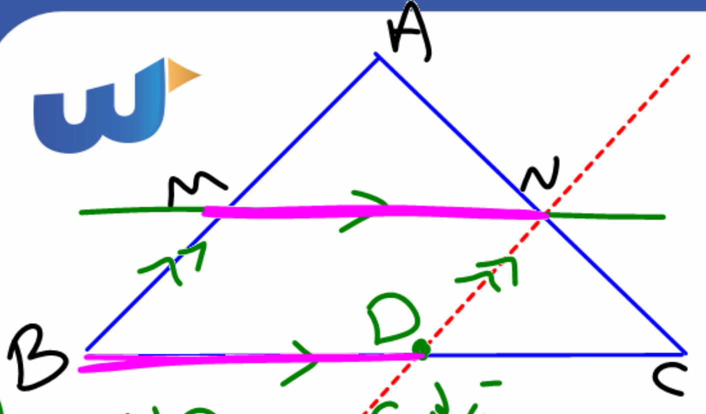
$$\Rightarrow 7x = 3x+9 \rightarrow x = \frac{9}{4}$$



$$\overset{\triangle}{AFC}: \frac{5}{8} = \frac{AE}{EF}$$

$$\overset{\triangle}{AFD}: \frac{13}{x} = \frac{AE}{EF}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{13}{x} \Rightarrow x = \frac{104}{5}$$



فرض: $MN \parallel BC$

حکم: $\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}}=\frac{MN}{BC}$

تعمیم قضیه تالس را ثابت کنید.

(1) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

(2) از N خطی موازی با AB رسم می‌کنیم

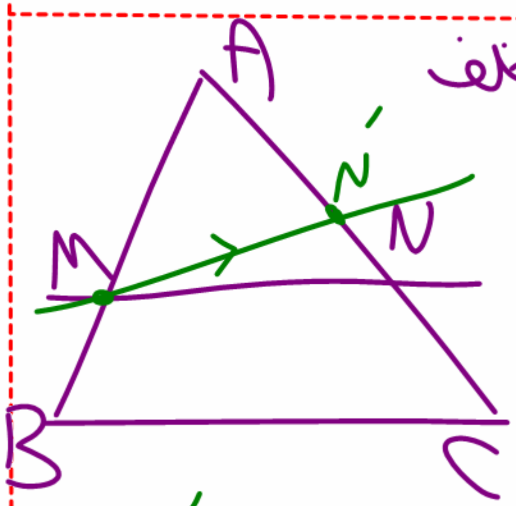
$ND \parallel AB \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{BD}{DC}$

$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AN}{AC}=\frac{\cancel{BD}\ MN}{BC}$

$MNDB$ چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است

$\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

عکس قضیه تالس را ثابت کنید. با برهان خلف

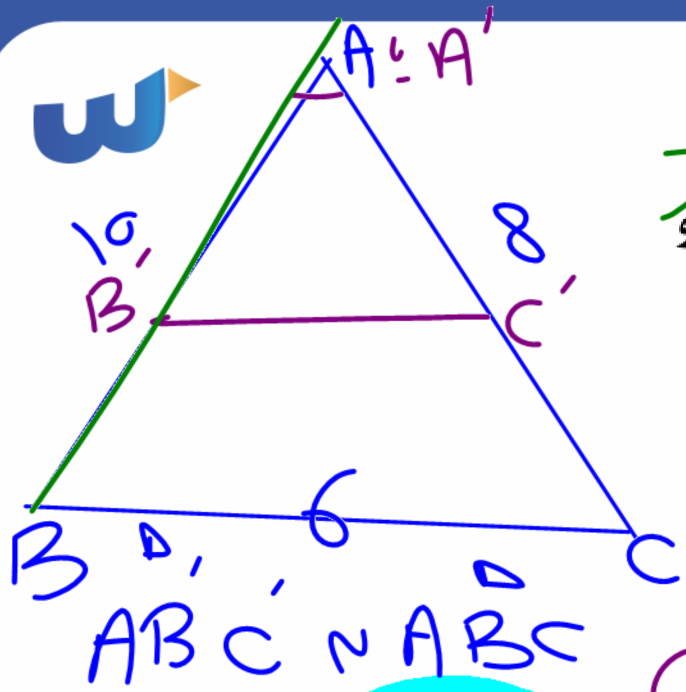


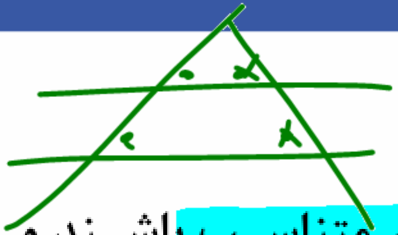
فرض: $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

حکم: $MN \parallel BC$

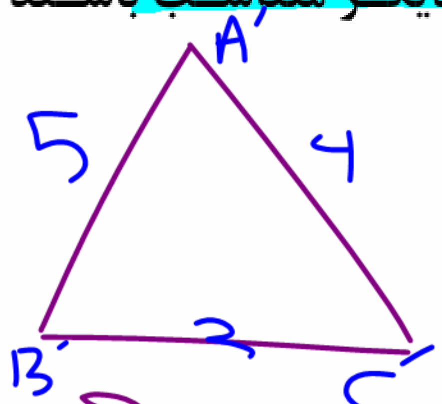
فرض خلف: $MN \nparallel BC$

$MN' \parallel BC \to \frac{AN'}{N'C}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow N=N'$





هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه‌ی بین آن‌ها هم اندازه باشند دو مثلث متشابه‌اند.



فرض: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A'}$

حکم: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

(1) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \xRightarrow{\text{عکس تالس}} BC \parallel B'C'$

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

(2) $BC \parallel B'C'$

مورب $AB \rightarrow \hat{B} = \hat{B'}$

مورب $AC \rightarrow \hat{C} = \hat{C'}$

$\overset{\triangle}{AB'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

ز ز

دو ضلع متناسب و یک زاویه

سه ضلع متناسب

$\Rightarrow$

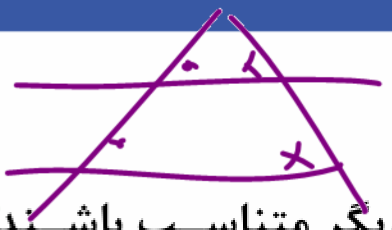
(1) $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$

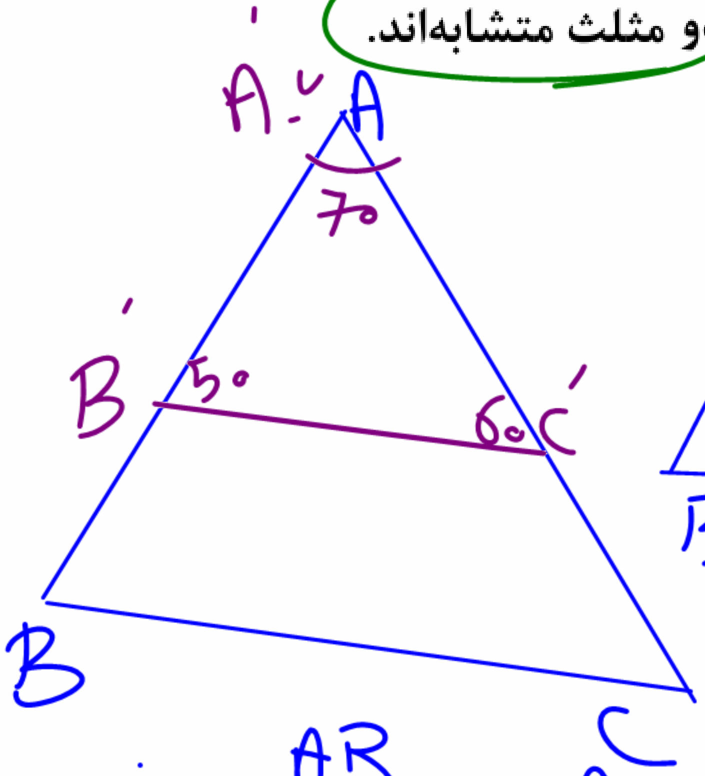
(2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$

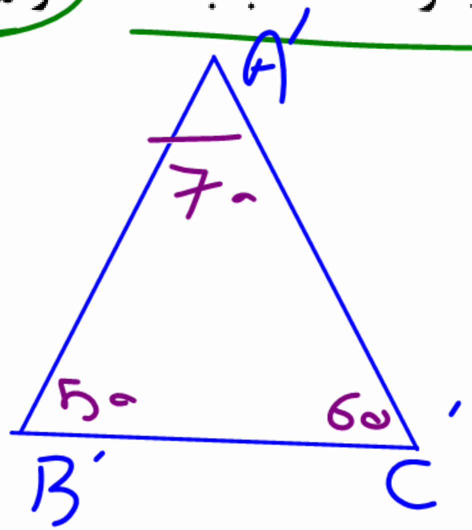
(3) نسبت محیط‌ها = نسبت ارتفاع‌ها = نسبت نیمسازها = نسبت میانه‌ها $= K$

(4) $\frac{S}{S'} = K^2$

هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند دو مثلث متشابه‌اند.







فرض: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

حکم: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

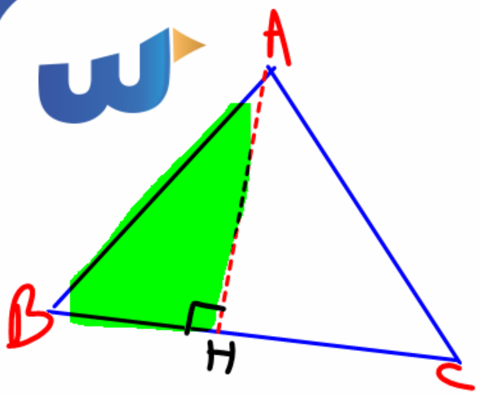
فرض: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow BC \parallel B'C'$

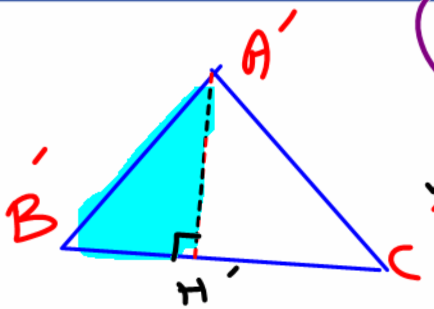
$BC \parallel B'C' \rightarrow \begin{cases} AB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B'} \\ AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{C} = \hat{C'} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

نسبت ارتفاع‌ها در هر دو مثلث متشابه، برابر است با نسبت تشابه.

نسبت میانه‌ها در هر دو مثلث متشابه، برابراست با نسبت تشابه.





فرض: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{B}=\hat{B}'$ و $\hat{C}=\hat{C}'$ ، $\boxed{\frac{AB}{A'B'}}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$

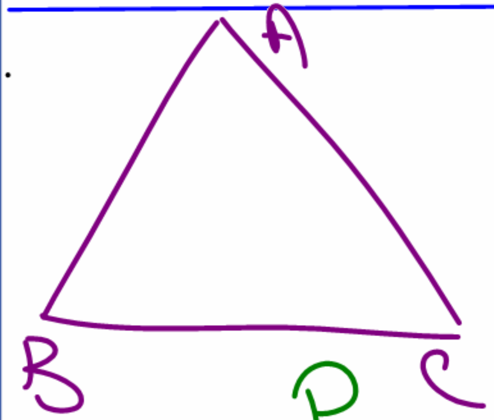
حکم: $\frac{AH}{A'H'}=K$

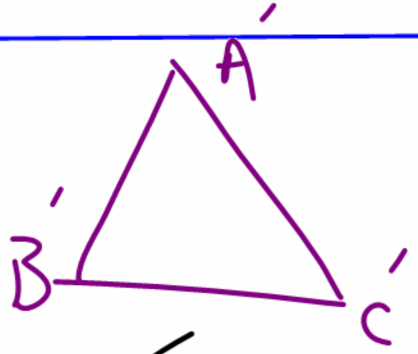
نسبت نیمسازها در هر دو مثلث متشابه، برابراست با نسبت تشابه.

$$\begin{cases}\hat{H}=\hat{H}'=90^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{cases} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \Rightarrow \boxed{\frac{AB}{A'B'}}=\boxed{\frac{AH}{A'H'}}=\frac{BH}{B'H'}$$

$AB=K\,A'B'$

نسبت محیطها در هر دو مثلث متشابه، برابراست با نسبت تشابه.

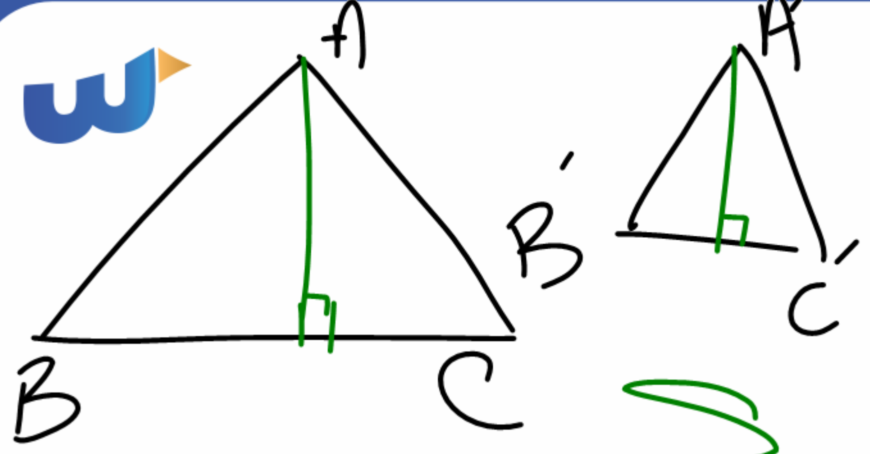




فرض:

حکم: $\frac{P}{P'}=K$

$$\frac{P}{P'}=\frac{\cancel{AB}+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{K\cdot A'B'+K\cdot A'C'+K\cdot B'C'}{A'B'+A'C'+B'C'}=K$$



حکم: $\frac{S}{S'} = K^2$

* نسبت مساحت‌ها در هر دو مثلث متشابه، برابراست با $\underbrace{\text{نسبت تشابه}}_{\text{مربع}}$.

$$\frac{S}{S'} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\,\boxed{h}^{\,K} \times \boxed{BC}^{\,K}}{\cancel{\frac{1}{2}}\,\boxed{h'} \times \boxed{B'C'}} = K^2$$

EX: اندازه‌های محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ است. اگر مساحت مثلث بزرگتر ۱۵ واحد باشد مساحت مثلث کوچکتر را بیابید.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{18}{10} = \underbrace{\frac{9}{5}}_{K} \rightarrow \frac{S_1}{S_2} = K^2 \Rightarrow \frac{15}{S_2} = \frac{81}{25}$$

$$S_2 = \frac{25 \times 15}{81}$$

EX: نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگتر چقدر است؟

۱) ۱۲/۷۵ ۲) ۱۳/۵ ۳) $۲۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲۴\sqrt{۳}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{49}{\underset{64\times2}{128}} = k^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} k = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{\cancel{21}^{\,3}}{x} = \frac{\cancel{7}^{\,1}}{8\sqrt{2}}$$

EX: نسبت مساحت دو پنج ضلعی منتظم $\frac{۹}{۱۶}$ است اگر محیط کوچکتر ۱۸ باشد محیط بزرگتر کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

$$\frac{S}{S'} = \frac{9}{16} = k^2 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{18}{P} = \frac{3}{4} \Rightarrow P = 24$$

ثابت کنید، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ای ایجاد شده است.

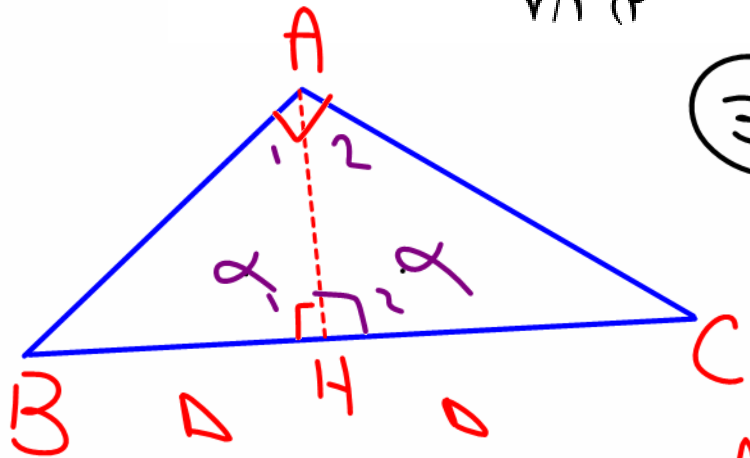
$A_1+\hat{B}=90$

$A_1+A_2=90$

$$\begin{cases}\hat{H}_1=\hat{H}_2\\ \hat{B}=\hat{A}_2\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABH}\sim \overset{\triangle}{AHC}\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AH}{HC}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow AH^2=BH\times HC$$

EX: در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر، روی وتر ایجاد می‌کنـد ۲/۵ و ۱۴/۴ است، طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۴/۸ ۳) ۶ ۴) ۷/۲



③ $AH^2=BH\times HC$

① $\overset{\triangle}{ABH}\sim \overset{\triangle}{ABC}\rightsquigarrow AB^2=BH\times BC$

② $\overset{\triangle}{AHC}\sim \overset{\triangle}{ABC}\rightsquigarrow AC^2=HC\times BC$

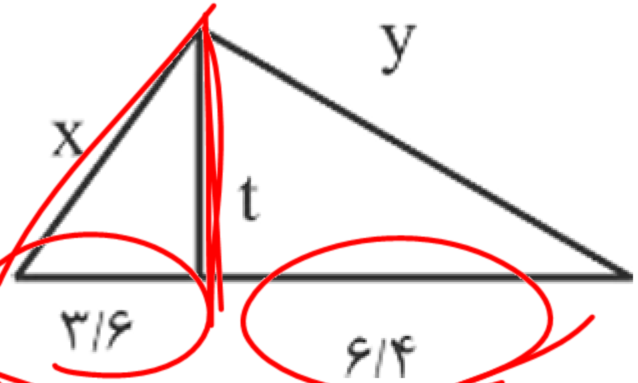
$h^2=2{,}5\times 14{,}4$

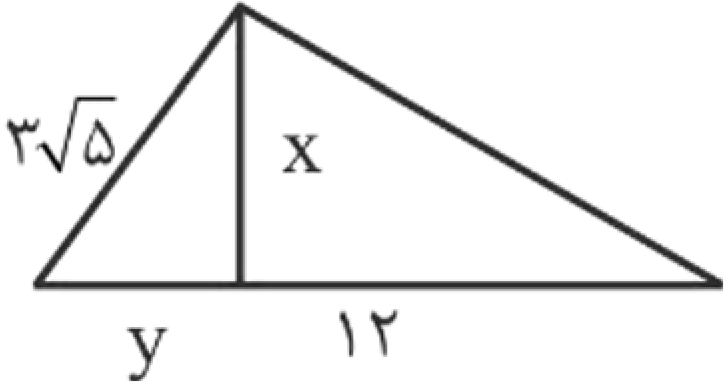
$$h=\sqrt{\frac{25}{10}\times\frac{144}{10}}=\frac{5\times 12}{10}=6$$

EX: در هر یک از شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید؟

$$t^2 = \frac{36}{10} \times \frac{64}{10}$$

$$t = \frac{48}{10} = 4{,}8$$





$$x^2 = 3{,}6 \times 10$$

$$x = 6$$

$$y^2 = 6{,}4 \times 10$$

$$y = 8$$

تعداد قطرهای یک چند ضلعی برابر ۲۰ است. مجموع زوایای داخلی آن کدام است؟

$$\frac{n(n-3)}{2}=20$$

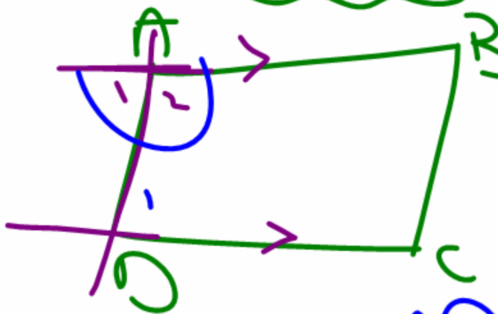
$$n(n-3)=40 \longrightarrow n=8 \longrightarrow (n-2)\times 180=1080^\circ$$

در کدام چند ضلعی تعداد قطرها 5 برابر تعداد اضلاع است؟

$$\frac{\cancel{n}(n-3)}{2}=5\cancel{n}$$

$$n-3=10 \longrightarrow n=13$$

* در هر متوازی‌اضلاع هر دو زاویه مجاور مکملند.



فرض: $ABCD$ متوازی‌الاضلاع

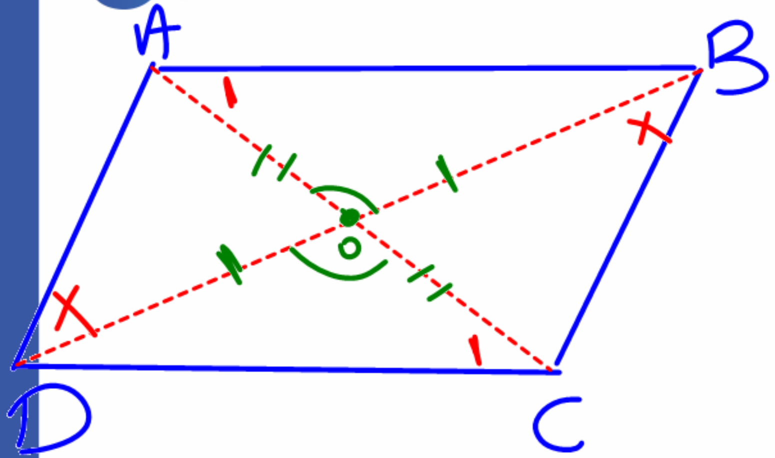
حکم: $\hat{A}+\hat{D}=180$

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{A}_1=\hat{D}_1$$

$$\longrightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2=180 \longrightarrow \hat{D}_1+\hat{A}_2=180$$

$\hat{C}_1 = \hat{A}_1 \xrightarrow[\text{و مورب}]{\text{عکس خطوط موازی}} AB \parallel DC$

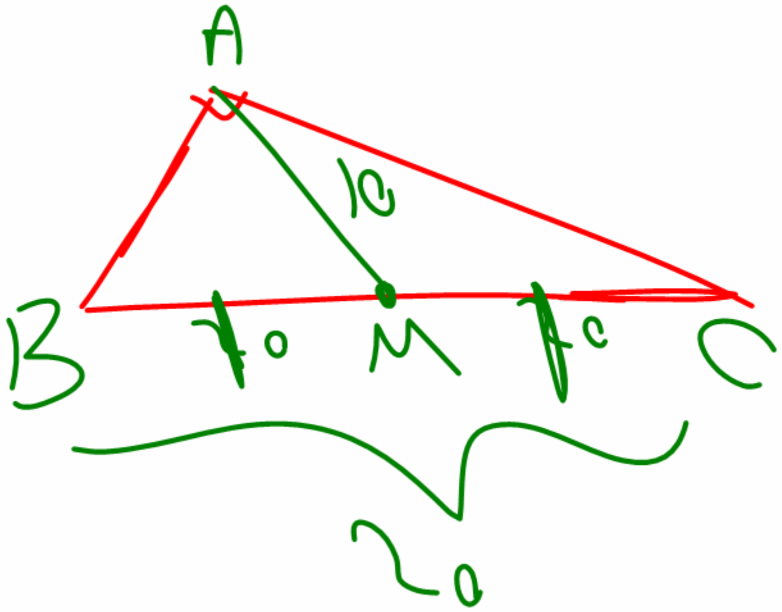
$AD \parallel BC$ به طریق مشابه



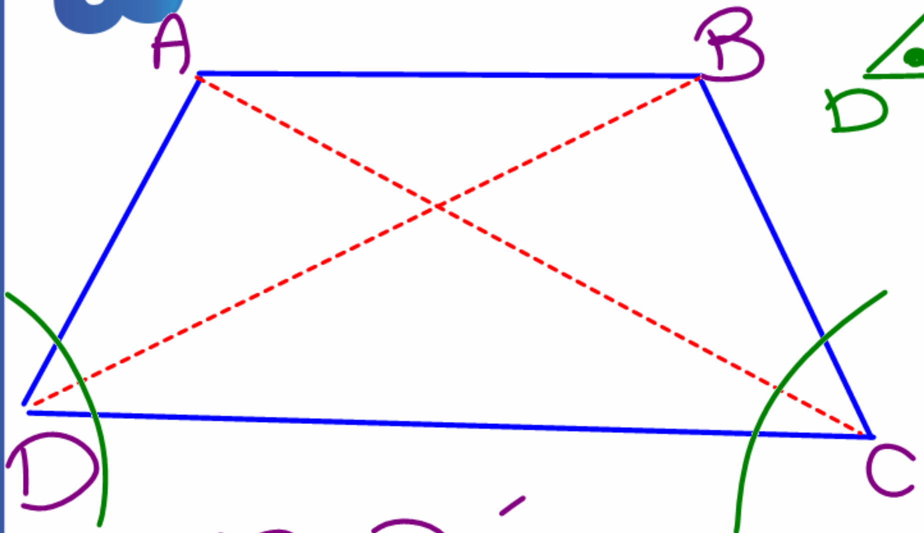
هر چهارضلعی که قطرهای آن نصف یکدیگر باشند متوازی‌اضلاع است.

فرض: O وسط

حکم: ABCD متوازی الاضلاع $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$ $\begin{cases} OA = OC \\ OD = OB \\ O_1 = O_2 \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{ODC}$



در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.



* در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند.

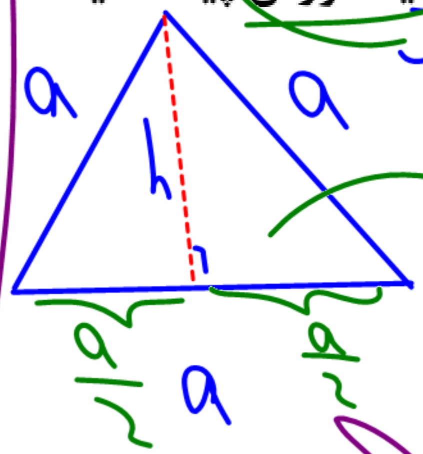
فرض: $ABCD$ متساوی‌الساقین

حکم: $AC = BD$

$$\begin{cases} AD = BC \\ DC = DC \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \Rightarrow AC = BD \checkmark$$

* مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به کمک رابطه‌ی فیثاغورس پیدا کنید؟

نکته: در مثلث متساوی الاضلاع، ارتفاع، میانه هم هست



$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \to h^2 = \frac{a^{2\times 4}}{1\times 4} - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{h = \frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

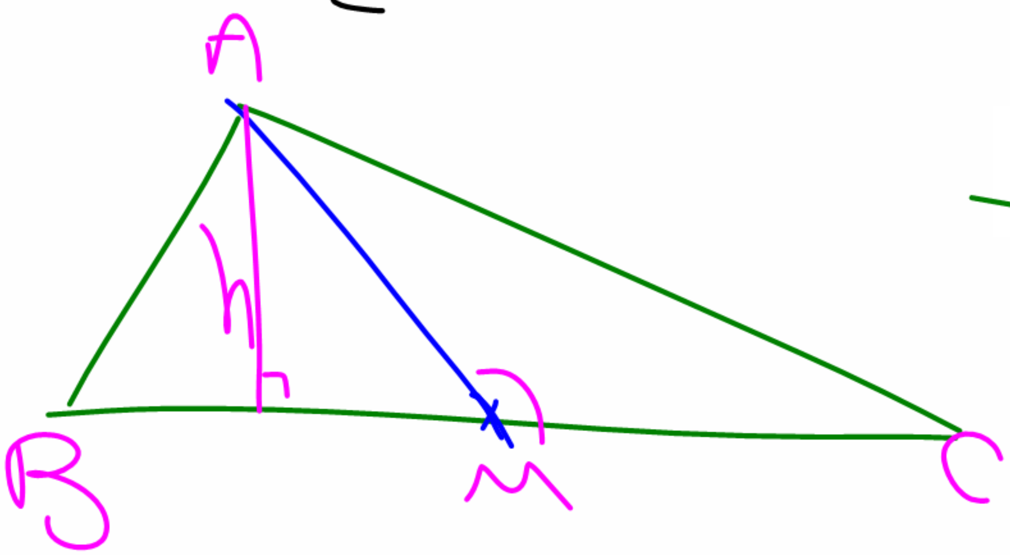
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} h \times a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}a}{2} \times a = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

مساحت مثلث متساوی‌اضلاعی به ضلع $۲\sqrt{۳}$ چند برابر ارتفاع آن است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱

$$\frac{S}{h} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} a^{2}}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} a} = \frac{1}{2}a = \sqrt{3}$$

نشان دهید با رسم هر میانه در هر مثلث، مساحت آن مثلث نصف می‌شود.



$$\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{h} \times \cancel{MB}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{h} \times \cancel{MC}} = 1$$

فاصله‌ی نقطه‌ی همرس میانه‌ها از وسط ضلع $\frac{۱}{۳}$ اندازه‌ی میانه‌ی نظیر این ضلع است.

مهم

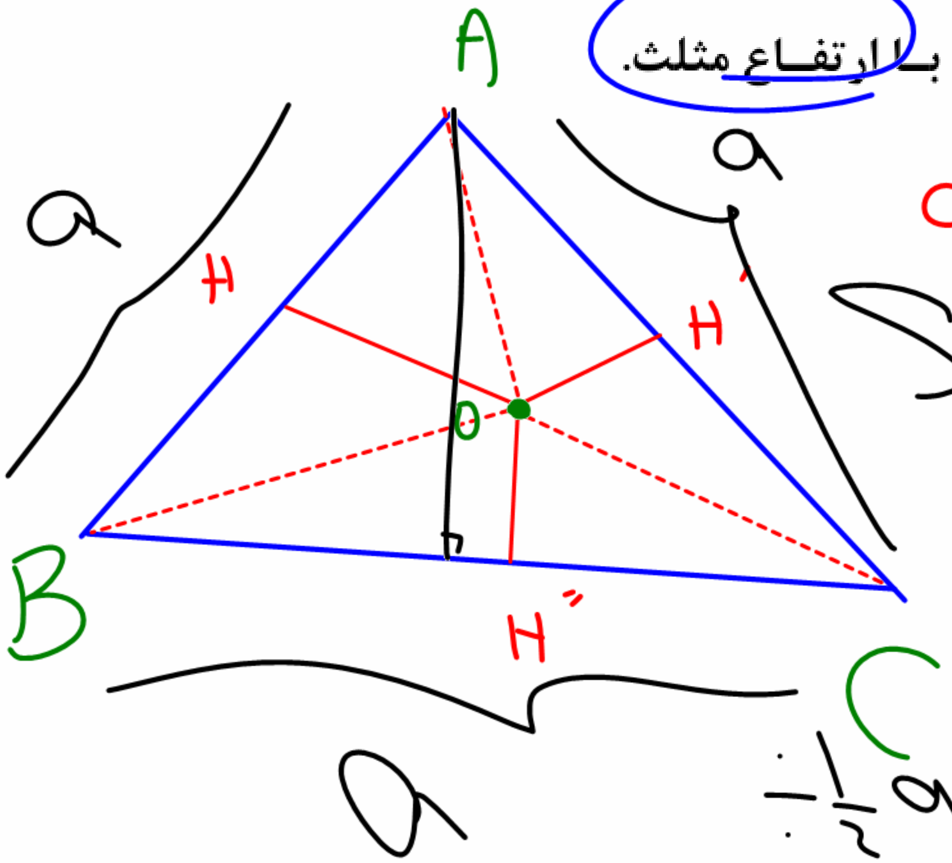
فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند، به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند ثابت کنید

$S_{OAD} = S_{OBC}$

هر نقطه که روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین، مجمــوع فواصــل آن از دو ســاق برابــر ارتفاع وارد بر ساق است.

قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی مثلث متســاوی‌الســاقین از دو ساق برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق.

مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌اضلاع از سه ضلع برابر است بـا ارتفـاع مثلث.



$$OH + OH' + OH'' = h$$

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$\frac{1}{2} \times h \times a = \frac{1}{2} \times OH \times a + \frac{1}{2} \times OH' \times a + \frac{1}{2} OH'' \times a$$

$$\div \frac{1}{2} a \Rightarrow h = OH + OH' + OH''$$